Nombres de Betti du schéma de Hilbert d'une surface

Joseph Le Potier

Soit X une surface algébrique complexe lisse, quasi-projective. L'objet de l'exposé est de calculer les nombres de Betti du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ qui paramètre les sous-schémas finis de longueur n de X. Ce résultat a d'abord été obtenu par Göttsche en utilisant les conjectures de Weil et les résultats de Ellingsrud et Strømme décrivant les nombres de Betti dans le cas du plan projectif; une autre démonstration reposant sur les propriétés de l'homologie d'intersection a ensuite été donnée par Göttsche et Soergel. Nous suivons ici le cours de H. Nakajima "Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces" [7], et pour l'homologie d'intersection les articles de M. Goresky et R. MacPherson [4].

1. La formule de Macdonald

On désigne par $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ la variété algébrique des cycles $\sum_x n_x x$ de dimension 0 sur X, de longueur $\sum_n n_x = n$. La formule de Macdonald calcule les nombres de Betti de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ en fonction des nombres de Betti de X. Soit $\mathrm{P}_t(\mathrm{S}^n\mathrm{X}) = \sum_i t^i b_i(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$ le polynôme de Poincaré de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ Pour une formulation simple, il est commode d'introduire la série formelle

$$\mathrm{P}(q,t) = \sum_{n\geq 0} q^n \mathrm{P}_t(\mathrm{S}^n\mathrm{X}).$$

PROPOSITION 1. — *Soient b_i les nombres de Betti de la surface* X.

$$\mathrm{P}(q,t) = \prod_{i=0,\dots,4} (1-(-1)^i t^i q)^{(-1)^{i+1} b_i}$$

LEMME 2. — *Soit* X *une variété sur laquelle opère un groupe fini* G. *La cohomologie rationnelle de* X/G *est donnée par*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{X}/\mathrm{G},\mathbb{Q}) = \mathrm{H}^*(\mathrm{X},\mathbb{Q})^{\mathrm{G}}$$

Démonstration. Soit $\mathrm{EG} \to \mathrm{BG}$ le classifiant de G. Considérons l'action à gauche de G sur $\mathrm{EG} \times \mathrm{X}$ définie par $g.(e,x) = (eg^{-1}, gx)$ et le quotient $\mathrm{X}_{\mathrm{G}} =$

$EG \times_G X$, dont la cohomologie est par définition la cohomologie G−équivariante de X. Considérons les deux projections

$$\begin{array}{ccc} X_G & \xrightarrow{q} & X/G \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \\ BG & & \end{array}$$

La projection localement triviale $p : X_G \to BG$ de fibre X fournit la suite spectrale de cohomologie équivariante

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathbb{Q})) \Rightarrow H_G^*(X, \mathbb{Q})$$

Le groupe G étant fini cette suite spectrale dégénère, et conduit à l'identification

$$H_G^*(X, \mathbb{Q}) \simeq H^*(X, \mathbb{Q})^G.$$

L'autre projection n'est pas localement triviale quand l'action de G sur X n'est pas libre. Si x est un point de X, et G_x le stabilisateur du point x, la fibre au-dessus du point $[x]$ est homéomorphe au classifiant $BG_x = EG/G_x$. Par conséquent les images directes $R^i q_*(\mathbb{Q}) = 0$ sont nulles pour $i > 0$. L'espace topologique quotient est localement contractile, et la cohomologie $H^*(X/G, \mathbb{Q})$ peut se calculer comme cohomologie du faisceau constant $\mathbb{Q}$. La suite spectrale de Leray fournit un isomorphisme $H^*(X/G, \mathbb{Q}) \simeq H_G^*(X, \mathbb{Q})$. □

La variété de cycles S^nX est la quotient de X^n par l'action du groupe symétrique. Soit $pr_i = X^n \to X$ la i-ème projection. D'après la formule de Künneth, on a un isomorphisme d'algèbres graduées $\otimes_{i\in[1,n]} H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq H^*(X^n, \mathbb{Q})$ défini pour $u_i \in H^{\nu_i}(X, \mathbb{Q})$ par

$$u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \mapsto u_1 \times \ldots \times u_n$$

où le terme de droite désigne le produit cartésien des classes de cohomologie. D'après les propriétés du produit cartésien, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation, on a

$$\sigma^*(u_1 \times \ldots \times u_n) = \pm u_{\sigma_1} \times \ldots \times u_{\sigma_n}$$

où le signe dépend de σ et de la parité des n_i. Par exemple, pour $n = 2$, si u_1 et u_2 sont de degré impair, et τ la transposition qui échange les facteurs,

on a $\tau^*(u_1 \times u_2) = -u_2 \times u_1$. L'algèbre des classes de cohomologie invariantes est isomorphe à $\mathrm{Sym}(\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(\mathrm{X})) \otimes \wedge(\mathrm{H}^{\mathrm{impair}}(\mathrm{X}, \mathbb{Q}))$. Il en résulte que si on pose $\mathrm{H}^i = \mathrm{H}^i(\mathrm{X})$ le polynôme de Poincaré est donné par

$$\mathrm{P}_t(\mathrm{S}^n\mathrm{X}) = \sum_{\substack{n_0,\ldots,n_4 \\ n_0+\ldots+n_4=n}} t^{n_1+2n_2+\ldots+4n_4} \dim(\mathrm{S}^{n_0}\mathrm{H}^0 \otimes \mathrm{S}^{n_2}\mathrm{H}^2 \otimes \mathrm{S}^{n_4}\mathrm{H}^4 \otimes \wedge^{n_1}\mathrm{H}^1 \otimes \wedge^{n_3}\mathrm{H}^3)$$

Compte-tenu du fait que pour tout espace vectoriel W on a

$$\sum_k t^k \dim \mathrm{S}^k\mathrm{W} = \frac{1}{(1-t)^{\dim \mathrm{W}}} \quad \text{et} \quad \sum_k t^k \dim \wedge^k\mathrm{W} = (1+t)^{\dim \mathrm{W}},$$

on en déduit que $\mathrm{P}(q,t)$ est donné par la formule de l'énoncé.

2. Le résultat de Göttsche

On considère le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ des sous-schémas finis de X de longueur n.

THÉORÈME 3. — *On pose* $\mathrm{H}(q,t) = \sum_{n,i} q^n t^i b_i(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}))$. *On a*

$$\mathrm{H}(q,t) = \prod_{m=1}^{\infty} \mathrm{P}(q^m t^{2m-2}, t)$$

COROLLAIRE 4. — *Soient* $d_+ = \dim \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(\mathrm{X})$ *la somme des nombres de Betti d'indice pair, et* $d_- = \dim \mathrm{H}^{\mathrm{impair}}(\mathrm{X}, \mathbb{Q})$ *la somme des nombres de Betti d'indice impair. La dimension de* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n, \mathbb{Q})$ *est donnée par*

$$\sum_n q^n \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}), \mathbb{Q}) = \mathrm{H}(q,1) = \prod_{m\geq 1} \frac{(1+q^m)^{d_-}}{(1-q^m)^{d_+}}$$

COROLLAIRE 5. — *Les nombres de Betti de* $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ *sont donnés par la formule*

$$\sum_{n,i} q^n t^i b_i(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) = \prod_{m\geq 1} \frac{1}{1-q^m t^{2m-2}}.$$

En particulier

$$\sum_n q^n \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) = \prod_{m\geq 1} \frac{1}{1-q^m} = \sum_n \mathrm{part}(n) q^n$$

Le nombre $\mathrm{part}(n)$ est le nombre de partitions de n, c'est-à-dire le nombres de suites décroissantes $\nu_1 \geq \ldots \geq \nu_m$ telles que $\sum_i \nu_i = n$.

3. Le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Considérons l'ensemble $\mathcal{M}$ des triplets $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \times \mathrm{End}(\mathrm{E})$ satifaisant aux conditions suivantes

(C) $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = 0$

(S) Le seul sous-espace vectoriel $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ contenant e et stable par A et B est E.

Le groupe $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathrm{E})$ opère sur $\mathcal{M}$ par $g.(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) = (ge, g\mathrm{A}g^{-1}, g\mathrm{B}g^{-1})$.

PROPOSITION 6. —

(i) *L'ensemble quotient* $\mathcal{M}/\mathrm{G}$ *est en bijection avec le schéma de Hilbert* $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$.

(ii) *L'action de* G *sur* $\mathcal{M}$ *est libre.*

(iii) *L'ensemble* $\mathcal{M} \subset \mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \times \mathrm{End}(\mathrm{E})$ *est l'ensemble des points stables de* $\mathrm{W} = \mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \times \mathrm{End}(\mathrm{E})$ *pour la polarisation donné par le* G*−fibré inversible* L_χ *défini par le caractère* $\chi(g) = \det g$, *satisfaisant à la condition* (C).

Le fibré inversible L_χ considéré dans (iii) est défini par le fibré $\mathrm{W} \times \mathbb{C}$ sur lequel G agit à gauche par $g.(z, \mu)) = (gz, \chi(g)\mu)$. Il en résulte en particulier que cette proposition munit le quotient $\mathcal{M}/\mathrm{G}$ d'une structure de variété algébrique.

Démonstration. (i) Un point Z du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ défini une algèbre quotient $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\mathrm{Z})$ de $\mathbb{C}[x, y]$ de dimension n. Un isomorphisme $\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\mathrm{Z}) \simeq \mathrm{E}$ définit par transport un triplet $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ correspondant à l'élément neutre, à la multiplication par x et la multiplication par y . Puisque c'est une algèbre quotient de $\mathbb{C}[x, y]$ la condition de stabilité (S) est évidemment satisfaite. Réciproquement, à une telle donnée $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ on associe une structure de $\mathbb{C}[x, y]-$module sur E. L'application linéaire $\mathbb{C}[x, y] \to \mathrm{E}$ définie par $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B})e$ est surjective par la condition de stabilité. Ainsi, ce module est engendré par e. L'annulateur de e alors un idéal de colongueur n dans $\mathbb{C}[x, y]$ et donc l'algèbre quotient de $\mathbb{C}[x, y]$ par l'annualteur définit un point du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$.

(ii) Le stabilisateur d'un point $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}$ correspond aux endomorphismes $g \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$ qui commutent avec A et B, et laissent fixe e. Alors un tel endomorphisme doit laisser fixe tout point de la forme $\mathrm{A}^i\mathrm{B}^j e$ et par suite $g = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Il reste à montrer que l'action est propre. Mais ceci résultera de (iii).

(iii) Les points semi-stables de $\mathrm{W} = \mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \times \mathrm{End}(\mathrm{E})$ sont les points z tels qu'il existe un polynôme f non nul en z satisfaisant à la condition d'invariance

$$f(g.z) = (\det g)^n f(z).$$

Mais cette condition n'est pas facile à utiliser. Nous allons l'interpréter plus géométriquement. Considérons le plongement $\mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{W} \oplus \mathbb{C})$, défini par $z \mapsto [z : 1]$. L'espace vectoriel $\mathrm{W} \oplus \mathbb{C}$ est muni de l'action définie par $g.(z, v) = (gz, \chi(g)^{-1}v)$. Montrons que les points $z = (e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ de W qui ne sont stables sont exactement ceux pour lesquels il existe un sous-espace vectoriel $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ invariant par A et B et qui contienne e. On utilise pour ceci le critère de Mumford. Supposons que $(z, 1)$ ne soit pas stable. D'après le critère de Mumford, il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathrm{G}$ tel que $\lambda(t)(z, 1)$ ait une limite quand $t \to 0$. On écrit $\mathrm{E} = \oplus_n \mathrm{E}_n$ où E_n est le sous-espace de poids t^n; dans cette somme directe, $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_n^m), \mathrm{B} = (\mathrm{B}_n^m)$ et $e = \sum_n e_n$. On a alors

$$\lambda(t)(z, 1) = (\sum_n t^n e_n, t^{m-n}(\mathrm{A}_n^m, \mathrm{B}_n^m), t^s)$$

où $s = \sum_n n \dim \mathrm{E}_n$. La condition ci-dessus entraîne :

(1) Pour $m < n$, on a $\mathrm{A}_n^m = 0$ et $\mathrm{B}_n^m = 0$;

(2) Pour $n < 0$, on a $e_n = 0$

(3) $s = \sum_n n \dim \mathrm{E}_n \leq 0$.

Considérons alors le sous-espace $\mathrm{F} = \oplus_{n \geq 0} \mathrm{E}_n$. D'après les conditions (1) et (2) ce sous-espace est invariant par A et B, et contient e ; d'après la condition (3) il est différent de E. Donc le point z n'appartient pas à $\mathcal{M}$. Réciproquement, étant donné un point de W qui n'appartient pas à $\mathcal{M}$ on peut construire trouver un sous-espace $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ strict stable par A et B et qui contient e. Considérons une somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F}' \oplus \mathrm{F}$ et et le sous-groupe à un paramètre défini par la matrice

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{-k}\mathrm{id} & 0 \\ 0 & t\mathrm{id} \end{pmatrix}$$

Alors $\lambda(t)(z,1) = (\lambda(t)z, t^{k\dim \mathrm{F}' - \dim \mathrm{F}})$ et on voit donc que si k est assez grand, $\lim_{t\to 0}\lambda(t)(z,1)$ est finie. Par suite, le point $(z,1)$ n'est pas un point stable pour l'action de G.

Il résulte que si $z \in \mathcal{M}$, l'application $g \mapsto g(z,1) : \mathrm{G} \mapsto \mathrm{W} \oplus \mathbb{C}$ est propre. Montrons plus précisément que si $z \in \mathcal{M}$ l'application $\mathrm{G} \to \mathcal{M}$ définie par $g \mapsto g.z$ est propre, ou ce qui revient au même, que pour tout sous-groupe à un paramètre λ, on $\lim_{t\to 0}\lambda(t)z$ n'existe pas dans $\mathcal{M}$. Si la limite existait dans $\mathcal{M}$, on aurait pour la limite $\mathrm{A}_n^m = 0$ et $\mathrm{B}_n^m = 0$ pour $n \neq m$, et $e \in \mathrm{E}_0$. Mais alors, le sous-espace E_0 devrait être égal à E, et par conséquent le sous-groupe à un paramètre devrait être trivial. □

Il est facile de voir que la variété algébrique $\mathbf{H} = \mathcal{M}/\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ ainsi construite paramètre un sous-schéma universel Ξ de $\mathbf{H} \times \mathbb{C}^2$, plat et fini de longueur relative n au-dessus de H et que le couple $(\mathbf{H}, \Xi)$ ainsi construit satisfait à la propriété universelle qu'on attend.

PROPOSITION 7. — *La variété* $\mathbf{H} = \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ *est algébrique lisse de dimension* $2n$.

Démonstration. Montrons d'abord que l'application : $\Phi : (e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ est de rang constant $n^2 - n$ en tout point $z \in \mathcal{M}$. La différentielle est donnée par l'application linéaire $\mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \to \mathrm{End}(\mathrm{E})$

$$(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \eta) \to [\mathrm{U}, \mathrm{B}] + [\mathrm{A}, \mathrm{V}]$$

L'application linéaire transposée est donnée par

$$\Lambda \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ [\Lambda, \mathrm{B}] \\ -[\Lambda, \mathrm{A}] \end{pmatrix}$$

de sorte que le noyau correspond aux endomorphismes qui commutent à la fois avec A et B. Supposons que d'abord que $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ soit un point de $\mathcal{M}$. Alors E est un module sur $\mathbb{C}[x,y]$ et la condition ci-dessus signifie que Λ est un endomorphisme du $\mathbb{C}[x,y]$-module E, défini par les endomorphismes A et B. Ce module est un module libre de rang un sur l'algèbre du sous-schéma de $\mathbb{C}^2$ associé à $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$, engendré par e. Donc un tel endomorphisme est déterminé par l'image de e. Ainsi

$$\mathrm{coker}\, d_{\mathrm{A},\mathrm{B},e}\Phi \simeq \mathrm{E}^*$$

et l'espace tangent de Zariski de $\mathcal{M}$ est de dimension $n^2 + 2n$.

On va montrer que $\mathcal{M}_{\text{red}}$ est lisse de dimension $n^2 + 2n$. Considérons le morphisme $\Phi : \mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \to \mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E})$ défini par $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto (e, [\mathrm{A}, \mathrm{B}])$; ces variétés sont considérées comme des schémas relatifs au-dessus de E. Une petite variante de la démonstration ci-dessus montre qu'au-dessus d'un point e, cette application est de rang $n^2 - n$ en tout point $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ satisfaisant à la condtion de stabilité (ii). Considérons le sous-fibré vectoriel de rang n de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}^*$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E})$ des couples $(e, e \otimes f)$, où $f \in \mathrm{E}^*$. Le même argument que ci-dessus montre que le morphisme Φ est transverse à $\mathrm{E} \times \mathrm{E}^*$ sur l'ouvert des triplets $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ satisfaisant à la condition de stabilité. On considère, dans l'ouvert des triplets $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ satisfaisant à cette condition de stabilité (S), l'image réciproque $\Phi^{-1}(\mathrm{E} \times \mathrm{E}^*)$: c'est une sous-variété lisse $\mathcal{N}$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E})$ de dimension $n^2 + 2n$, qui contient évidemment $\mathcal{M}_{\text{red}}$. L'énoncé est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 8. — *On a* $\mathcal{M}_{\text{red}} = \mathcal{N}$.

Démonstration. Au voisinage de $\mathcal{M}$, les vecteurs $\mathrm{A}^p\mathrm{B}^q e$ engendrent E. Soit $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{N}$. Alors $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = e \otimes f$, avec $f \in \mathrm{E}^*$. On a donc $f(e) = \mathrm{tr}\,[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = 0$. Plus généralement, on vérifie sans difficulté la formule $\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}^p\mathrm{B}^q[\mathrm{A}, \mathrm{B}]) = \mathrm{tr}\,[\mathrm{A}^{p+1}, \mathrm{B}^{q+1}] = 0$ et d'autre part cette trace est aussi $f(\mathrm{A}^p\mathrm{B}^q e)$. On a donc $f(\mathrm{A}^p\mathrm{B}^q e)$. Cet argument serait suffisant au voisinage de $\mathcal{M}$. Si $p_1, \ldots, p_k$ et $q_1, \ldots, q_k$ sont deux suites d'entiers de sommes respectives p et q on vérifie par récurrence

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}^{p_1}\mathrm{B}^{q_1} \ldots \mathrm{A}^{p_k}\mathrm{B}^{q_k}[\mathrm{A}, \mathrm{B}]) = \mathrm{tr}\,[\mathrm{A}^{p+1}, \mathrm{B}^{q+1}] = 0$$

et par suite $f(\mathrm{A}^{p_1}\mathrm{B}^{q_1} \ldots \mathrm{A}^{p_k}\mathrm{B}^{q_k} e) = 0$. La condition de stabilité (S) assure que les vecteurs $\mathrm{A}^{p_1}\mathrm{B}^{q_1} \ldots \mathrm{A}^{p_k}\mathrm{B}^{q_k} e$ engendrent E. Ceci entraîne $f = 0$, et par suite $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = 0$. Ainsi $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ est un point de $\mathcal{M}$. □

Le morphisme $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{S}^n(\mathbb{C}^2)$

En terme de la description ci-dessus le morphisme de Hilbert-Chow a une interprétation géométrique très simple.

PROPOSITION 9. — *Le morphisme canonique* $\pi : \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{S}^n\mathbb{C}^2$ *est*

induit par l'application $\mathcal{M} \to \mathrm{S}^n\mathbb{C}^2$ *définie pour* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, e) \in \mathcal{M}$ *par*

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, e) \mapsto \sum_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2} \dim(\ker(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{id})^n \cap \ker(\mathrm{B} - \mu\mathrm{id}))^n(\lambda, \mu)$$

Démonstration. Le morphisme $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{S}^n(\mathbb{C}^2)$ est évidemment donné par $\mathrm{Z} \to \sum_{a\in|\mathrm{Z}|} \ell(\mathrm{Z}_a)a$, où $|\mathrm{Z}|$ est le support de Z, et Z_a est la composante passant par a.

Soit Z le sous-schéma de $\mathbb{C}^2$ associé le point $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, e)$; soit Z_a la composante de Z passant par le point $a = (\lambda, \mu) \in |\mathrm{Z}|$. Considérons la somme directe

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\mathrm{Z}) = \oplus_{a\in|\mathrm{Z}|}\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathrm{Z}_a})$$

La multiplication par $x - \lambda$ induit au point $a = (\lambda, \mu)$ dans l'algèbre $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathrm{Z}_a})$ une application linéaire nilpotente. De même la multiplication par $y - \mu$ induit une application linéaire nilpotente dans cette algèbre. Ainsi, dans l'isomorphisme $\mathrm{E} \simeq \oplus_{a\in|\mathrm{Z}|}\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathrm{Z}_a})$ le sous-espace $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathrm{Z}_a})$ correspond exactement à l'intersection $\ker(\mathrm{A} - \lambda id)^n \cap \ker(\mathrm{B} - \mu\mathrm{id}))^n$. L'énoncé en résulte. □

COROLLAIRE 10. — *La fibre* $\pi^{-1}(n.0)$ *est isomorphe à l'espace des classes d'équivalence de triplets* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, e) \in \mathcal{M}$ *tels que* A *et* B *soient nilpotentes.*

4. Structure kälhérienne sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$

Soit G un groupe de Lie compact opérant sur une variété symplectique réelle (M, ω). Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Pour $\xi \in \mathfrak{g}$, on désigne par ξ_* le champ de vecteurs associé sur M.

DÉFINITION 11. —*Une application moment est une application* $\mu : \mathrm{M} \to \mathfrak{g}^*$ *qui est* G*−invariante et telle que pour* $\xi \in \mathfrak{g}$ *on ait* $\langle d\mu, \xi\rangle = \omega(\xi_*, -)$

Autrement dit le gradient symplectique de la fonction scalaire $\mu(\xi)$ est le champ de vecteurs ξ_*.

LEMME 12. — *L'application moment est une submersion en tout point* $x \in \mathrm{M}$ *où le stabilisateur est réduit à l'élément neutre.*

Démonstration. En effet, la différentielle $d_x\mu : \mathrm{T}_x\mathrm{M} \to \mathfrak{g}^*$ en $x \in \mathrm{M}$ est donnée par $d_x\mu(v) = \omega_x(\xi_*(x), v)$. Pour voir que cette application linéaire est surjective, il suffit de voir que la transposée définie par l'application linéaire $\mathfrak{g} \to \mathrm{T}_x^*\mathrm{M}$

$$\xi \mapsto \omega_x(\xi_*(x), -)$$

est injective. Mais puisque la forme symplectique est non dégénérée, il suffit de constater que $\xi \mapsto \xi_*(x)$ est injective. Ceci résulte du fait que le stabilisateur est réduit à un point. □

Supposons que M soit en outre munie d'une métrique riemannienne. Alors la structure symplectique définit sur M une structure presque complexe, telle que $g(iu, v) = \omega(u, v)$ pour tous vecteurs tangents u et v au point x. Supposons que le groupe G laisse invariant à la fois la structure riemanienne et la structure symplectique.

LEMME 13. — *Soient $x \in \mathrm{M}$ un point où le stabilisateur G_x est réduit à l'élément neutre, et $y = \mu(x)$. On suppose que y est invariant par l'action coadjointe. Alors le fibré normal de l'orbite passant par x dans $\mu^{-1}(y)$ est naturellement muni d'une structure complexe.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que le fibré normal est isomorphe au conoyau de la flèche $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ définie par $(\xi, \eta) \mapsto \xi_*(x) + i\eta_*(x)$. En effet, si on identifie T_x avec T_x^* au moyen de la structure riemannienne, on voit que la transposée de $d_x\mu$ est l'application $\eta \mapsto i\eta_*(x)$. Par conséquent, le fibré normal est le quotient de $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ par un sous-espace vectoriel complexe. □

Comme $\ker d_x\mu$ est l'orthogonal pour la forme symplectique de l'espace tangent à l'orbite, le fibré normal hérite d'une structure symplectique. Il hérite aussi d'une structure euclidienne. La structure euclidienne, symplectique et complexe obtenues sur l'espace normal sont encore compatibles entre elles.

Exemple d'application moment

Soit $(\mathrm{W}, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel hermitien. Cet espace vectoriel est alors muni d'une structure euclidienne $(\ ,\ )$ et d'une structure symplectique ω définis $(u, v) = \Re\langle u, v\rangle$ différentielle $\omega(v, w) = -\mathrm{Im}\,\langle u, v\rangle$. Ces deux structures sont liées par $g(iu, v) = \omega(u, v)$.

Soit G un groupe de Lie compact opérant à travers $\mathfrak{u}(\mathrm{W})$. Alors on peut considérer pour $\xi \in \mathfrak{g}$ l'application $\mathrm{W} \to \mathfrak{g}^*$ définie par

$$\mu(w)(\xi) = \frac{i}{2}\langle \xi.w, w\rangle.$$

LEMME 14. — *L'application $\mu : \mathrm{W} \to \mathfrak{g}^*$ est une application moment.*

Démonstration. On a pour $v \in \mathrm{W}$, identifié à l'espace tangent à W en w, et $\xi \in \mathrm{G}$

$$d_w\mu(\xi)(v) = \mathrm{Re}\langle i\xi.w, v\rangle = \omega(\xi.w, v)$$

et par conséquent le gradient symplectique de $\mu(\xi)$ est bien le champ de vecteurs $w \mapsto \xi.w$. □

Exemple

Soit E un espace vectoriel complexe, et $\mathrm{W} = \mathrm{E} \times \mathrm{End}(\mathrm{E}) \times \mathrm{End}(\mathrm{E})$. Si on munit E d'une structure hermitienne, l'espace vectoriel W se trouve équipé d'une structure hermitienne, définie par la forme quadratique hermitienne

$$|(v, (\mathrm{U}, \mathrm{V}))|^2 = |v|^2 + \mathrm{tr}\,(\mathrm{UU}^+ + \mathrm{VV}^+),$$

où U^+ et V^+ sont les adjoints de U et V. L'action naturelle de U(E) agissant de manière naturelle sur W définie par $g.(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) = (ge, g\mathrm{A}g^{-1}, g\mathrm{B}g^{-1})$ est compatible avec cette structure hermitienne. On obtient alors par le procédé ci-dessus une application moment $\mu : \mathrm{W} \to \mathfrak{u}(\mathrm{E})^*$.

LEMME 15. — *Sur* W, *l'application moment est donnée par*

$$\mu(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{1}{2i}(e \otimes e^+ + [\mathrm{A}, \mathrm{A}^+] + [\mathrm{B}, \mathrm{B}^+])$$

où A^+ *et* B^+ *sont les adjointes de* A *et* B *respectivement, et où* e^+ *est l'application* $x \mapsto \langle x, e\rangle$ *de* E *dans* $\mathbb{C}$.

Dans cette formule, on identifie le dual de $\mathfrak{u}(\mathrm{E})$ avec $\mathfrak{u}(\mathrm{E})$ au moyen de la forme quadratique non dégénérée $\mathrm{A} \mapsto -\mathrm{tr}\,\mathrm{A}^2$.

Démonstration. Vue la définition de l'action de U(E) sur W, on a pour $\xi \in \mathfrak{u}(\mathrm{E})$

$$\begin{aligned}\mu(e,\mathrm{A},\mathrm{B})(\xi) =& \frac{i}{2}((\xi e, e) + \mathrm{tr}\,([\xi,\mathrm{A}]\mathrm{A}^+ + [\xi,\mathrm{B}]\mathrm{B}^+)\\ =& \mathrm{tr}\,(\frac{i}{2}[e\otimes e^+ + [\mathrm{A},\mathrm{A}^+] + [\mathrm{B},\mathrm{B}^+]]\xi)\end{aligned}$$

ce qui entraine immédiatement le résultat. □

Considérons le caractère $\chi : \mathrm{U(E)} \to \mathrm{S}^1$ défini par l'application déterminant. La différentielle $d\chi$ définit une application linéaire $\mathfrak{u}(\mathrm{E}) \to i\mathbb{R}$, et $id\chi = i\mathrm{tr}$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{u}(\mathrm{E})$; elle définit donc un élément de $\mathfrak{u}(\mathrm{E})$ qui n'est autre que $-i\mathrm{id}_\mathrm{E}$. Rappelons que le groupe GL(E) opère sur W, et que la sous-variété $\mathcal{M}$ est invariante par l'action de GL(E). Ainsi, $\mathcal{M}$ hérite d'une structure de variété kählérienne. L'application moment sur W induit une application moment sur $\mathcal{M}$. On considère la sous-variété lisse $\mathcal{R} = \mu^{-1}(\frac{1}{2i}\mathrm{id}))$, qu'on appellera réduction de Marsden-Weinstein. Cette sous-variété est donc définie par l'équation dans $\mathcal{M}$

$$e\otimes e^+ + [\mathrm{A},\mathrm{A}^+] + [\mathrm{B},\mathrm{B}^+] = \mathrm{id}_\mathrm{E}$$

et est invariante par l'action de U(E) et passe au quotient pour donner une variété kählérienne $\mathcal{R}/\mathrm{U(E)}$ appelée quotient symplectique.

THÉORÈME 16. —

(i) *La sous-variété $\mathcal{R}$ est la sous-variété de* W *des points* $(e,\mathrm{A},\mathrm{B})$ *de* W *satisfaisant aux conditions suivantes*

$$e\otimes e^+ + [\mathrm{A},\mathrm{A}^+] + [\mathrm{B},\mathrm{B}^+] = \mathrm{id}_\mathrm{E}\ ;\ [\mathrm{A},\mathrm{B}] = 0$$

En particulier, $\mathcal{R}$ est fermée dans W.

(ii) *L'inclusion $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{M}$ induit un isomorphisme*

$$\mathcal{R}/\mathrm{U(E)} \to \mathcal{M}/\mathrm{GL(E)}$$

La condition (i) signifie que les équations données imposent la stabilité. Le quotient $\mathcal{R}/\mathrm{U(E)}$ est donc une variété lisse équipée d'une structure presque complexe kählérienne puisque le stabilisateur de chaque point de $\mathcal{M}$ est réduit à l'élément neutre ; la métrique riemannienne et la forme symplectique induisent

une structure complexe sur le fibré normal des trajectoires et ces structures passent au quotient ; le membre de gauche hérite alors d'une structure de variété kählérienne. En chaque point, les espaces vectoriels tangents sont isomorphes, en tant qu'espaces vectoriels complexes. Le point pour (ii) est donc de démontrer que toute GL(E)−trajectoire d'un point de $\mathcal{M}$ rencontre $\mu^{-1}(\frac{1}{2i}\mathrm{id})$ et que deux points dans l'intersection sont conjugués sous U(E).

5. Fonctions de Morse sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$

On va d'abord décrire dans un cadre général la variante symplectique du théorème de Byalynicki-Birula, dans le cadre de variétés symplectiques non obligatoirement compactes, avant de l'appliquer à $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$

Fonctions de Morse associées à l'action d'un tore.

Soit M une variété symplectique équipée d'une métrique riemannienne. Soit T est un tore qui agit sur M en préservant ces structures. Considérons une application moment μ pour l'action de T. Pour un élément $\xi \in \mathfrak{t}$ (algèbre de Lie de T) on considère la fonction

$$f(x) = \mu(x)(\xi).$$

Les points critiques de f sont les points tels que $\omega(\xi_*(x), -) = 0$ c'est-à-dire tels que $\xi_*(x) = 0$. Ce sont donc les points fixes du groupe à un paramètre $\exp(\mathbb{R}\xi)$. Si ξ est générique, ce groupe est dense dans T, et donc les points fixes par ce groupe à un paramètre sont exactement les points fixes de T.

Examinons maintenant la nature des points critiques.

Soit M^{T} le fermé des points fixes de T, et $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \cup_\nu \mathrm{C}_\nu$ sa décomposition de M^{T} en composantes connexes. On sait que T préserve la structure symplectique et la structure riemannienne sur M. Pour $x \in \mathrm{C}_\nu$, les éléments de T définissent des applications unitaires dans l'espace tangent T_x. On a une décomposition en somme directe orthogonale de sous-espaces complexes

$$\mathrm{T}_x\mathrm{M} = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Char(T)}} \mathrm{V}_\lambda.$$

Au voisinage de x, on peut trouver un voisinage ouvert T−équivariant U et un isomorphisme $(\mathrm{T}_x, 0) \simeq (\mathrm{U}, x)$.

LEMME 17. — *Dans cet isomorphisme, l'application f s'écrit, en posant $v = \sum_\lambda v_\lambda$ dans la décomposition ci-dessus*

$$f(v) = f(x) + \frac{1}{2}\sum_\lambda \langle id\lambda, \xi\rangle |v_\lambda|^2 + \text{ termes d'ordre supérieur}$$

Démonstration. On identifie U avec T_x. Dans cet isomorphisme, g et ω deviennent des métriques g_v et ω_v qui varient avec le point $v \in \mathrm{T}_x$. Alors

$$\begin{aligned} f(x+v) &= f(x) + \int_0^1 d_{tv} f.v dt \\ &= f(x) + \int_0^1 \omega_{tv}(\xi_*(tv), v) dt \end{aligned}$$

Considérons, pour $v = \sum_\lambda v_\lambda$ le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{t} \arrow[r, "d\lambda"] \arrow[d, "\xi \mapsto \exp(\xi)v"'] & i\mathbb{R} \arrow[d, "\eta \mapsto \exp(\eta)v_\lambda"] \\ \mathrm{T}_x \arrow[r, "\mathrm{pr}_\lambda"] & \mathrm{V}_\lambda \end{tikzcd}$$

Ce diagramme signifie que $\exp(\xi)v = \sum_\lambda \exp(\langle d\lambda, \xi\rangle)v_\lambda$. Cette formule montre que $\xi_*(v)$ est donnée par $\xi_*(v) = \sum_\lambda \langle d\lambda, \xi\rangle v_\lambda$. Compte-tenu de la relation entre g et ω, il en résulte que le développement limité de $v \mapsto f(x+v)$ est à l'ordre 2

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2}\sum_\lambda \langle id\lambda, \xi\rangle |v_\lambda|^2 + \epsilon |v|^2$$

□

DÉFINITION 18. — *Soit* M *une variété lisse. On dit qu'une fonction lisse* $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *est non dégénérée au sens de Bott si*

(1) *l'ensemble Σ des points singuliers de f est une sous-variété lisse. Le Hessien de f définit alors une forme quadratique dont le noyau contient l'espace tangent à Σ.*

(2) *En un point singulier, le noyau du Hessien est exactement l'espace tangent à Σ.*

Revenons à notre fonction $f(x) = \langle \mu(x), \xi \rangle$.

PROPOSITION 19. — *Si ξ est générique, la fonction f est non dégénérée au sens de Bott.*

Démonstration. On a déjà vu qu'au voisinage d'un point $x \in \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$, il existe un voisinage ouvert T−invariant U et un T−difféomorphisme $\varphi : \mathrm{T}_x \to \mathrm{U}$. Il suffit donc d'étudier la variété des points critiques dans T_x. Mais dans la décomposition $\mathrm{T}_x = \oplus_\lambda \mathrm{V}_\lambda$, les points T-invariants correspondent au sous-espace V_0. C'est donc une sous-variété de T_x. L'espace normal s'identifie à $\mathrm{N}_x = \oplus_{\lambda \neq 0} \mathrm{V}_\lambda$. En raison de l'hypothèse de généricité, la proposition précédente montre que le Hessien est non dégénéré dans cette direction. □

Supposons $f(x) \leq m$ soit compacte pour tout $m \in \mathbb{R}$.
On pose pour $x \in \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$,

$$\mathrm{N}_x^+ = \oplus_{\lambda, \langle id\lambda, \xi \rangle > 0} \mathrm{V}_\lambda \quad ; \mathrm{N}_x^- = \oplus_{\lambda, \langle id\lambda, \xi \rangle < 0} \mathrm{V}_\lambda$$

On pose encore $d_\nu = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{N}_\nu^-$: c'est l'indice de la variété critique C_ν. Soit $\phi_t(x)$ le flot défini par le gradient de f (relatif à la structure riemannienne). On désigne par W_ν^+ la sous-variété des points stables relatifs à C_ν : il s'agit des points $x \in \mathrm{M}$ tels que $\lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) \in \mathrm{C}_\nu$; c'est une variété localement fermée T−difféomorphe au fibré normal N_ν^+. De même la variété des points instables relative à la composante C_ν, définie par les points tels que $\lim \phi_t(x) \in \mathrm{C}_\nu$, est homéomorphe au fibré normal N_x^-. Soit f_ν la valeur de f sur C_ν. On définit une relation d'ordre sur les composantes de M^{T} de la manière suivante : on décide que $\nu \leq \mu$ si $\nu = \mu$ ou si $f_\nu < f_\mu$. On a alors

$$\overline{\mathrm{W}_\nu^+} \leq \cup_{\nu \leq \mu} \mathrm{W}_\mu.$$

Soit c une valeur critique ; on pose $\mathrm{M}_{c,-} = \cup_{\mu f_\mu < c} \mathrm{W}_\mu^+$ et $\mathrm{M}_{c,+} = \cup_{\mu, f_\mu \leq c} \mathrm{W}_\nu^+$. Alors $\mathrm{M}_{c,-}$ et $\mathrm{M}_{c,+}$ sont des ouverts de M, et $\cup_{\nu, f_\nu = c} \mathrm{W}_\nu^+$ est une sous-variété fermée dans $\mathrm{M}_{c,+}$ dont les composantes connexes correspondent aux ν tels que $f_\nu = c$. Soit $\mathrm{N}_{c,\nu}$ le fibré normal dans $\mathrm{M}_{c,+}$ sur la composante connexe correspondant à ν ; en restriction à C_ν il s'identifie à la variété instable W_ν^-. Alors l'inclusion $(\mathrm{W}_\nu^-, \mathrm{W}_\nu^- \setminus \mathrm{C}_\nu) \hookrightarrow (\mathrm{N}_{c,\nu}, \mathrm{N}_{c,\nu} \setminus \mathrm{W}_\nu^+)$ est une équivalence d'homotopie. Il résulte de l'isomorphisme de Thom

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{M}_{c,+}, \mathrm{M}_{c,-}) = \oplus_{f_\nu = c} \mathrm{H}^{q-d_\nu}(\mathrm{C}_\nu)$$

On obtient alors pour le polynôme de Poincaré

$$\mathrm{P}_t(\mathrm{M}_{c,+}) \leq \mathrm{P}_t(\mathrm{M}_{c,-}) + \sum_{\nu, f_\nu = c} t^{d_\nu} \mathrm{P}_t(\mathrm{C}_\nu).$$

Si on suppose que f n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques, on obtient en particulier l'inégalité de Morse

$$\mathrm{P}_t(\mathrm{M}) \leq \sum_\nu t^{d_\nu} \mathrm{P}_t(\mathrm{C}_\nu)$$

THÉORÈME 20. — *On suppose que pour tout réel m le fermé de* M *défini par $f(x) \leq m$ est compact, et que f n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques. La fonction de Morse f est parfaite, autrement dit*

$$\mathrm{P}_t(\mathrm{M}) = \sum_\nu t^{d_\nu} \mathrm{P}_t(\mathrm{C}_\nu)$$

Ceci signifie que pour tout ν et le morphisme canonique (qu'on peut voir comme morphisme de Gysin pour l'inclusion $\cup_{f_\nu = c} \mathrm{W}_\nu^+ \hookrightarrow \mathrm{M}_{c,+}$)

$$\oplus_{\nu, f_\nu = c} \mathrm{H}^{q-d_\nu}(\mathrm{C}_\nu) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_{c,+})$$

est injectif. Dans le cas où tous les C_ν sont réduits à un point, ou plus généralement si les C_ν n'ont que de la cohomologie paire, la suite exacte de cohomologie relative se scinde parce que $\mathrm{M}_{c,-}$ n'a que de la cohomologie paire. Le résultat est donc évident dans ce cas, (et c'est le seul qui sera utilisé dans la suite). Mais il est en fait vrai en toute généralité.

Application au schéma de Hilbert

On considère l'action naturelle de $\mathrm{T} = \mathrm{U}(1)^2$ sur W, définie par $t.(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) = (e, \alpha(t)\mathrm{A}, \beta(t)\mathrm{B})$, où α et β sont les projections naturelles sur U(1). Cette action est compatible avec la structure hermitienne sur W et par conséquent laisse invariante la réduction de Marsden-Weinstein $\mathcal{R}$. Elle commute avec l'action de U(E) sur $\mathcal{R}$ et par conséquent définit une action canonique sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ compatible avec la métrique kählérienne sur $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$. On peut alors considérer l'application moment $\mu : \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to \mathfrak{t}^*$ définie pour $\xi \in \mathfrak{t}$

$$\langle \mu(z), \xi \rangle = \frac{1}{2}(\langle id\alpha, \xi \rangle |\mathrm{A}|^2 + \langle id\beta, \xi \rangle |\mathrm{B}|^2)$$

où $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{R}$ est un représentant pour z dans la réduction de Marsden-Weinstein.

Considérons pour ξ générique, la fonction de Morse $f_\xi(z) = \langle \mu(z), \xi \rangle$. Il est clair que si les composantes $\langle id\alpha, \xi \rangle$ et $\langle id\beta, \xi \rangle$ sont positives, les fermés $f_\xi \leq m$ sont compacts : en effet, si $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{R}$ est un représentant pour z, $|\mathrm{A}|$ et $|\mathrm{B}|$ sont bornés. Alors, d'après la définition de $\mathcal{R}$, on a $e \otimes e^+ + [\mathrm{A}, \mathrm{A}^+] + [\mathrm{B}, \mathrm{B}^+] = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et par suite $|e|$ est aussi borné, et par suite $\mathcal{R}$ qui est fermé dans W est compact. Ainsi, le théorème pourra s'appliquer dès que l'on aura calculé les points fixes de l'action de T.

Points fixes

Rappelons que le groupe U(E) opère librement sur $\mathcal{R}$. Considérons un point z représenté par un triplet $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B})$. Dire que z est fixe revient à dire qu'il existe un morphisme de groupes $\lambda : \mathrm{T} \to \mathrm{U(E)}$ tel que pour tout $t \in \mathrm{T}$,

$$\begin{cases} \lambda(t)e = e \\ \lambda(t)^{-1}\mathrm{A}\lambda(t) = \alpha(t)\mathrm{A} \\ \lambda(t)^{-1}\mathrm{B}\lambda(t) = \beta(t)\mathrm{A} \end{cases}$$

L'homomorphisme λ permet de voir E comme un T$-$module qu'on écrit

$$\mathrm{E} = \oplus_{p,q}\mathrm{E}_{p,q}$$

où $\mathrm{E}_{p,q}$ est le sous-espace de poids $\alpha^p\beta^q$. Les deux dernières conditions signifient que A est de bidegré $(-1, 0)$, et B de bigré $(0, -1)$. En effet, la deuxième condition s'écrit par exemple en considérant la composante $\mathrm{A}^{r,s}_{p,q} : \mathrm{E}_{p,q} \to \mathrm{E}_{r,s}$ de A

$$\mathrm{A}^{r,s}_{p,q}\alpha^{p-r}\beta^{s-q} = \alpha\mathrm{A}^{r,s}_{p,q}$$

que ce qui montre que les composantes sont nulles sauf si $r = p-1$ et $s = q$. Même chose pour B. La première condition signifie que $e \in \mathrm{E}_{0,0}$.

PROPOSITION 21. — *Soit* $(e, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{R}$ *un représentant d'un point fixe* z, *et* $\mathrm{E} = \oplus_{p,q}\mathrm{E}_{p,q}$ *en sous-espaces de poids* $\alpha^p\beta^q$ *associée. Alors*

(i) $\mathrm{E}_{p,q} = 0$ *si* $p > 0$ *ou* $q > 0$.

(ii) *On a* $\dim \mathrm{E}_{p,q} \leq 1$.

(iii) *Si* $\mathrm{E}_{p,q} \neq 0$, *pour tout* r, s *tels que* $p \leq r \leq 0$ *et* $q \leq s \leq 0$ *on a* $\mathrm{E}_{r,s} \neq 0$.

(iv) *Les flèches induites par* A *ou* B *dont la source et le but sont des sous-espaces non nuls sont elles aussi non nulles.*

Démonstration. Les assertions (i), (ii), (iii) sont évidentes car la condition de stabilité dit que pour $p \geq 0$ et $q \geq 0$, $E_{-p,-q}$ est engendré par le vecteur A^pB^qe. Alors $E_{0,0}$ est de dimension 1, et $A^pB^q : E_{0,0} \to E_{-p,-q}$ est un isomorphisme si $E_{-p,-q}$ est non nul. La dernière relation résulte du fait que A et B commutent. □

Alors on associe à un point fixe un tableau de Young Y, en considérant l'ensemble des couples d'entiers positifs (p, q) tels que $E_{-p,-q} \neq 0$ et en translatant le tableau obtenu par le vecteur (1,1). On peut choisir dans chaque $E_{p,q}$ non nul une base de sorte que la matrice des $A_{p,q}$ et $B_{p,q}$ soit 1.

Réciproquement, à un tableau de Young Y on associe un point fixe de T. En effet, on peut choisir une base dans les espaces vectoriels $E_{1-p,1-q}$ et considérer toutes les flèches associées au tableau de Young dont la matrice est donnée par 1 ; ceci définit un point de W satisfaisant aux conditions de commutation (C) et de stabilité (S). Par suite, on obtient un point de $z' \in \mathcal{M}/GL(E)$, et la correspondance entre points fixes de T et tableaux de Young est évidemment bijective. Ce point provient d'un point (e, A, B) de $\mathcal{R}$ conjugué, modulo GL(E) au point de $\mathcal{M}$ qu'on vient de construire : ainsi le tableau du point $z \in \mathcal{R}/U(E)$ ainsi construit est le même que celui de z'.

Il en résulte en particulier que les points fixes sont en nombre fini, et indexés par l'ensemble des partitions de n.

Remarque.

Les normes des flèches $A_{p,q}$ et $B_{p,q}$ qui figurent dans le tableau de Young associées à un représentant de z peuvent aussi être calculées en utilisant les équations qui définissent $\mathcal{R}$. Le carré de la norme $|e|^2$ est toujours n.

Indice des points critiques

Soit z un point critique. Le groupe $T = U(1)^2$ agit sur l'espace tangent au schéma de Hilbert $T_z\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$. Pour trouver l'indice des points critiques de la fonction de Morse f_ξ, on a besoin de connaître la décomposition de l'espace tangent. On considère la représentation régulière R de dimension 2 de T définie par l'inclusion $T \subset U(2)$; on a donc $R = \alpha + \beta$. Le schéma de Hilbert est défini comme un quotient de la sous-variété de $W = E \oplus \mathrm{End}(E) \otimes R$ définie dans l'ouvert des points stables par l'image réciproque de 0 par le morphisme

$$\Phi : E \oplus \mathrm{End}(E) \otimes R \to \mathrm{End}(E) \otimes \wedge^2 R$$

où donné par $(e,(\mathrm{A},\mathrm{B})) \mapsto [\mathrm{A},\mathrm{B}]$. On choisit une fois pour toutes un représentant $(e,\mathrm{A},\mathrm{B})$ du point fixe z, de sorte que E se trouve équipé d'une structure de T−module, qu'on a désigné ci-dessus par λ. On munit E et End(E) de l'action naturelle à gauche induite par la structure de T−module définie par λ.

LEMME 22. — *Soit* $(e,\mathrm{A},\mathrm{B})$ *un représentant d'un point fixe* z *et* $\lambda : \mathrm{T} \to \mathrm{U(E)}$ *l'action associée. L'espace tangent est donné, dans l'anneau des représentations de* T *par*

$$\mathrm{T}_z\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) = \mathrm{E} \oplus \mathrm{E}^* \otimes \wedge^2\mathrm{R} - \mathrm{End(E)} \otimes (1 - \mathrm{R} + \wedge^2\mathrm{R})$$

Démonstration. L'espace vectoriel $\mathrm{W} = \mathrm{E} \oplus \mathrm{End(E)} \otimes \mathrm{R}$ est équipé naturellement d'une structure de T−module, ainsi que $\mathrm{End(E)} \otimes \wedge^2\mathrm{R}$; le morphisme Φ est alors T−équivariant, et de plus $(e,\mathrm{A},\mathrm{B})$ est invariant par cette action. L'application linéaire tangente en ce point est alors T−équivariante, et l'espace tangent en $z = [e,\mathrm{A},\mathrm{B}]$ est la représentation définie par la cohomologie du complexe T−équivariant

$$0 \to \mathrm{End(E)} \to \mathrm{E} \oplus \mathrm{End(E)} \otimes \mathrm{R} \to \mathrm{EndE} \otimes \wedge^2\mathrm{R}.$$

Comme dans la proposition 7 on voit que le conoyau de la deuxième flèche est T−isomorphe à $\mathrm{E}^* \otimes \wedge^2\mathrm{R}$. Il en résulte que l'on a dans l'anneau des représentations de T

$$\mathrm{T}_z\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) = \mathrm{E} \oplus \mathrm{E}^* \otimes \wedge^2\mathrm{R} - \mathrm{End(E)} \otimes (1 - \mathrm{R} + \wedge^2\mathrm{R})$$

□

Considérons la décomposition $\mathrm{E} = \oplus_{(p,q)\in\mathrm{Y}} \mathrm{E}_{1-p,1-q}$ où Y est le tableau de Young. Pour $s = (p,q) \in \mathrm{Y}$, désignons par $r(s)$ le nombre de boîtes $(p',q) \in \mathrm{Y}$, telles que $p' > p$ (ie dans le tableau de Young, le nombre de boîtes à droite sur la même ligne) tels que et par $h(s)$ le nombre de boîtes (p,q') tels que $q' > q$ (ou nombre de boîtes sur la même verticale située au-dessus.)

LEMME 23. — *La décomposition de l'espace tangent en composantes irréductibles est donnée par*

$$\mathrm{T}_z\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) = \sum_{s\in\mathrm{Y}} \alpha^{-r(s)}\beta^{h(s)+1} + \alpha^{r(s)+1}\beta^{-h(s)}.$$

COROLLAIRE 24. — *Choisissons* $\xi = (-i, -i\epsilon)$, *avec* $\epsilon > 0$ *assez petit* ($\epsilon < \frac{1}{n+1}$ *suffit). Alors l'indice du point critique* z *est* $2(n - \ell(\nu))$, *où* $\ell(\nu)$ *est le nombre de lignes dans le tableau de Young* ν *associé au point critique.*

En effet, d'après le lemme précédent, il suffit de calculer $\langle id(\alpha^p\beta^q), \xi\rangle$ pour $|p| \leq n+1$ et $|q| \leq n+1$. Vu le choix de ξ

$$\langle id(\alpha^p\beta^q), \xi\rangle = (p + q\epsilon).$$

Vu le choix de ϵ, ce nombre est strictement négatif si et seulement si $p < 0$, ou $p = 0$ et $q < 0$. Ainsi, $\mathrm{N}_z^- = \sum_{r(s)>0} \alpha^{-r(s)}\beta^{h(s)+1}$. L'indice est donc $2\#\{s, r(s) > 0\} = 2(n - \ell(\nu))$.

COROLLAIRE 25. — *Le polynôme de Poincaré de* $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ *est donné par la*

$$\mathrm{H}(q,t) = \sum_{n\geq 0} q^n \mathrm{P}_t(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) = \prod_{m\geq 1} \frac{1}{1 - q^m t^{2m-2}}$$

En effet, si $\mathrm{Part}(n)$ désigne l'ensemble des partitions de n, ce produit s'écrit en développant

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(q,t) &= \prod_{m\geq 1} \frac{1}{1 - q^m t^{2m-2}} \\
&= \sum_{m_1,\ldots,m_k,\ldots} t^{2m_2+\ldots+(2k-2)m_k} q^{m_1+2m_2+\ldots+km_k} \\
&= \sum_n \Big(\sum_{\substack{\nu_1\geq\cdots\geq\nu_k \\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k=n}} t^{2\nu_2+\ldots+2\nu_k} q^{\nu_1+\ldots+\nu_k} \Big) \\
&= \sum_n q^n \Big(\sum_{\nu\in\mathrm{Part}(n)} t^{2n-2\ell(\nu)} \Big) \\
&= \sum_{n\geq 0} q^n \mathrm{P}_t(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 26. — *La fibre* $\mathrm{F} = \pi^{-1}(n.0)$ *du morphisme de Hilbert-Chow :*

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{S}^n(\mathbb{C}^2)$$

est de dimension $n-1$ *et n'a qu'une composante irréductible de dimension* $n-1$.

Posons $\mathrm{M} = \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$. Le fait que la fonction de Morse soit parfaite peut se lire aussi en homologie ; il implique que l'homologie de M a pour base les classes fondamentales $[\overline{\mathrm{W}_\nu^-}] \in \mathrm{H}_{d_\nu}(\mathrm{M})$ des adhérences $\overline{\mathrm{W}_\nu^-}$, des variétés instables appelées cellules : c'est la duale de la base de $\mathrm{H}^*(\mathrm{M})$ obtenue par les classes fondamentales en cohomologie des adhérences $\overline{\mathrm{W}_\nu^+}$ des variétés stables.

Considérons l'action du groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(i\xi t)$ dont les trajectoires définissent le flot du gradient riemannien de f. La fibre F est invariante sous l'action de ce groupe à un paramètre. Les points critiques appartiennent à la fibre $\mathrm{F} = \pi^{-1}(n.0)$ puisque les matrices A, B sont nilpotentes pour un point critique. Les variétés instables sont alors contenues dans F, et constituent une stratification de F. Alors l'homologie de F a même base que l'homologie de M, et donc l'application $\mathrm{H}_*(\mathrm{F}) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{M})$ est obligatoirement un isomorphisme. En effet, on peut appliquer à M le même raisonnement avec la fonction de Morse opposée, qui permet de voir que la cohomologie relative $\mathrm{H}^*_{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$ a pour base les classes fondamentales en cohomologie de cohomologie de $\overline{\mathrm{W}_\nu^-}$. Bien sûr, la fibre F étant compacte, le théorème de dualité d'Alexander identifie $\mathrm{H}^q_{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$ avec $\mathrm{H}_{2n-q}(\mathrm{F})$, et dans cette dualité, la classe fondamentale en cohomologie devient la classe d'homologie. Ainsi, l'homologie $\mathrm{H}_*(\mathrm{F})$ a la même base que $\mathrm{H}_*(\mathrm{M})$.

On sait que F par ailleurs est une variété algébrique complexe compacte ; si $m = \dim \mathrm{F}$, le groupe d'homologie non nul de degré $2m$ est isomorphe au groupe abélien libre engendré par les composantes irréductibles de dimension m. Ce groupe est celui qui correspond aux partitions ν telles que $\ell(\nu) = 1$. Il n'y qu'une telle partition. Ainsi, $m = n-1$, et il n'y a qu'une composante irréductible de dimension $n-1$. □

Remarque

En fait un théorème de Gaffney et Lazarsfeld dit que toutes les composantes irréductibles de F sont de dimension $\geq n-1$. Cela implique que F est irréductible. Ce résultat a été démontré par Briançon (1977).

Appendice

Démonstration du lemme 23.

On considère un tableau de Young Y, et la partition associée $\nu_1 \geq \ldots \geq \nu_{\ell'}$. On désigne par $\nu'_1 \geq \ldots \geq \nu'_\ell$ la partition duale ; le nombre $\ell := \ell(\nu) = \nu_1$ est le nombre de lignes et $\ell' := \ell'(\nu) = \nu'_1$ le nombre de colonnes du tableau de Young.

On a alors $(1 - \mathrm{R} + \wedge^2\mathrm{R}) = (1-\alpha)(1-\beta)$ et

$$\mathrm{E} = \sum_{p=1}^{\ell'} \sum_{q=1}^{\nu_p} \alpha^{1-p}\beta^{1-q}.$$

Il en résulte

$$\mathrm{T}_z = \mathrm{E}(1 - \mathrm{R} + \wedge^2\mathrm{R}) = \sum_{p=1}^{\ell'} (\alpha^{1-p} - \alpha^{2-p})(\beta^{1-\nu_p} - \beta)$$

et $\mathrm{E}^* = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{\nu'_j} \alpha^{i-1}\beta^{j-1}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}(\mathrm{E})(1 - \mathrm{R} + \wedge^2\mathrm{R}) &= \sum_{p=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{\ell} (\beta^{j-\nu_p} - \beta^j)(\sum_{i=1}^{\nu'_j} \alpha^{i-1}(\alpha^{1-p} - \alpha^{2-p})) \\
&= \sum_{p=1}^{\ell'} \sum_{j=1}^{\ell} (\beta^{j-\nu_p} - \beta^j)(\alpha^{1-p} - \alpha^{\nu'_j-p+1}) \\
&= \sum_{\substack{1\le i\le \ell' \\ 1\le j\le \ell}} (\beta^{j-\nu_i} - \beta^j)(\alpha^{1-i} - \alpha^{\nu'_j-i+1}) \\
&= - \sum_{\substack{1\le i\le \ell' \\ 1\le j\le \ell}} (\alpha^{\nu'_j-i+1}\beta^{j-\nu_i} + \alpha^{1-i}\beta^j) \\
&\quad + \sum_{\substack{1\le i\le \ell' \\ 1\le j\le \ell}} \beta^j(\alpha^{1-i} - \alpha^{\nu'_j-i+1}) + (\beta^{j-\nu_i} - \beta^j)\alpha^{1-i}
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\le i\le \ell' \\ 1\le j\le \ell}} \beta^j(\alpha^{1-i} - \alpha^{\nu'_j-i+1}) &= \sum_{j=1}^{\ell} \beta^j \sum_{i=1}^{\nu'_j} (\alpha^{-\ell'+i} - \alpha^i) \\
&= -\,\mathrm{E}^* \otimes \wedge^2\mathrm{R} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{\nu'_j} \alpha^{-\ell'+i}\beta^j
\end{aligned}$$

De même

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq \ell' \\ 1\leq j\leq \ell}} (\beta^{j-\nu_i} - \beta^j)\alpha^{1-i} = -\mathrm{E} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{\nu'_j} \alpha^{1-i}\beta^{\ell-j+1}$$

On a alors

$$\mathrm{T}_z = \sum_{\substack{1\leq i\leq \ell' \\ 1\leq j\leq \ell}} (\alpha^{\nu'_j-i+1}\beta^{j-\nu_i} + \alpha^{1-i}\beta^j) - \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{\nu'_j} \alpha^{-\ell'+i}\beta^j + \alpha^{1-i}\beta^{\ell-j+1}$$

On voit que ceci s'écrit $\mathrm{T}_z = \sum_{s\in \mathrm{Y}} \alpha^{r(s)+1}\beta^{-h(s)} + \mathrm{U}$ où U est une somme algébrique de monômes de degré ≤ 0 en α. Or on a la dualité évidente $\mathrm{T}_z = \mathrm{T}_z^* \otimes \wedge^2\mathrm{R}$ et par suite

$$\mathrm{T}_z = \sum_{s\in \mathrm{Y}} \alpha^{-r(s)}\beta^{h(s)+1} + \mathrm{U}(\alpha^{-1},\beta^{-1})\alpha\beta.$$

L'expression $\mathrm{U}(\alpha^{-1},\beta^{-1})\alpha\beta$ est une somme algébrique de monômes de degré > 0 en α. Il en résulte que $\mathrm{U} = \sum_{s\in \mathrm{Y}} \alpha^{-r(s)}\beta^{h(s)+1}$ ce qui donne la formule attendue. D'où le lemme. □

6. Démonstration de la formule de Göttsche

Soit X une surface algébrique ; on considère le morphisme de Hilbert-Chow $\pi : \mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}) \to \mathrm{S}^n(\mathrm{X})$. On dispose d'une stratification naturelle de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$. En effet, à un cycle $\mathrm{Z} = \sum_x n_x x$ on associe de manière naturelle une partition $\nu'_1 \geq \ldots \geq \nu'_{\ell'}$ de n, en ordonnant la suite des valeurs de la fonction n_x par ordre décroissant. La partition duale est définie par

$$\nu_1 = \#\{x, n_x \geq 1\}, \nu_2 = \#\{x, n_x \geq 2\}, \ldots$$

On pose

$$\alpha_1 = \#\{x, n_x = 1\}, \alpha_2 = \#\{x, n_x = 2\}, \ldots$$

de sorte que $\alpha_1 = \nu_1 - \nu_2, \alpha_2 = \nu_2 - \nu_3, \ldots, \alpha_k = \nu_k$. Se donner la partition ν revient donc à se donner la suite d'entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Remarquons que $\sum_i \alpha_i = \nu_1 = \ell(\nu)$ est le nombre de lignes de la partition ν.

Désignons par $\mathrm{S}^n_\nu\mathrm{X}$ l'ensemble des cycles $\mathrm{Z} \in \mathrm{S}^n(\mathrm{X})$ dont la partition associée est ν.

LEMME 27. — *L'ensemble* $S^n_\nu(X)$ *est localement fermé et lisse de dimension* $2\ell(\nu)$. *Le morphisme* π *est topologiquement localement trivial au-dessus de* $S^n_\nu(X)$, *et la fibre au-dessus de* $S^n_\nu X$ *est de dimension* $n - \ell(\nu)$.

Démonstration. Désignons par $S^m_* X$ le complémentaire de la diagonale dans $S^m X$, ou ce qui revient au même, dans le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(X)$. La variété $S^n_\nu(X)$ est isomorphe à l'ouvert de

$$S^{\alpha_1}_* X \times S^{\alpha_2}_* X \times \ldots \times S^{\alpha_k}_* X$$

des $(Z_1, \ldots, Z_k)$ tels que Z_i et Z_j ne se rencontrent pas. La dimension de $S^n_\nu X$ est donc $2\ell(\nu)$.

La fibre de π au-dessus du point $\sum_{i=1}^{\ell(\nu)} \nu'_i x_i$ de $S^n_\nu(X)$ est isomorphe à

$$\pi^{-1}(\nu'_1 x_1) \times \pi^{-1}(\nu'_2 x_2) \times \ldots \times \pi^{-1}(\nu'_\ell x_\ell).$$

Cette fibre est donc irréductible de dimension $\sum_{i=1}^{\ell} \nu'_i - 1 = n - \ell(\nu)$.

Soit H^n_ν l'image réciproque de S^n_ν, et $\pi_\nu : H^n_\nu \to S^n_\nu$ la restriction de π à H^n_ν. Il reste à voir que du point de vue topologique, π_ν est localement trivial. En fait, c'est déjà vrai du point de vue analytique : il suffit de voir que le morphisme $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{C}^2) \to S^n(\mathbb{C}^2)$ est localement trivial au-dessus de la petite diagonale. C'est évident en faisant agir sur $\mathbb{C}^2$ le groupe des translations. □

Posons $d_\nu = 2(n - \ell(\nu))$, et désignons comme ci-dessus l'image réciproque H^n_ν de $S^n_\nu(X)$ par le morphisme π. Considérons le système local au-dessus de $S^n_\nu X$ défini par le faisceau localement constant $R^{d_\nu}\pi_{\nu *}(\mathbb{Q})$. Ce faisceau est en fait un faisceau constant puisque la fibre est irréductible.

THÉORÈME 28. — *On a*

$$H^q(\mathrm{Hilb}^n X, \mathbb{Q}) = \oplus_\nu \mathrm{IH}^{q-d_\nu}(\overline{S^n_\nu(X)}, R^{d_\nu}\pi_{\nu *}(\mathbb{Q})).$$

Le plan de la démonstration

Dans cette formule, la cohomologie qui intervient est la cohomologie d'intersection de $\overline{S^n_\nu(X)}$ à valeurs dans le faisceau localement constant $R^{d_\nu}\pi_{\nu *}(\mathbb{Q})$ sur S^n_ν. Puisque ce faisceau est en fait le faisceau constant, cette formule nous ramène à

calculer la cohomologie d'intersection de ces variétés singulières. Ce théorème sera expliqué au §7.10 dans le cadre des morphismes semi-petits (*cf.* théorème 53) : c'est en fait un cas particulier d'un résultat plus général de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber sur les faisceaux pervers [1].

Outre le théorème ci-dessus, les deux points essentiels sont les suivants :

1) On a un morphisme fini et birationnel

$$\mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{X} \times \mathrm{S}^{\alpha_2}\mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{X} \to \overline{\mathrm{S}^n_\nu \mathrm{X}}$$

donné par $(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_k) \mapsto \sum_i i\mathrm{Z}_i$. On va voir que dans ces conditions la cohomologie d'intersection reste inchangée. En effet c'est un cas particulier du résultat sur les petits morphismes du chapitre 8 (*cf.* proposition 51).

2) De plus, le premier membre est lisse en homologie rationnelle, car c'est le quotient d'une variété lisse par un groupe fini ; dans ces conditions, la cohomologie d'intersection coïncide avec la cohomologie ordinaire (*cf.* corollaire 46).

Le polynôme de Hilbert de $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ est alors donné par

$$\mathrm{P}_t(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})) = \sum_\nu t^{d_\nu} \mathrm{P}_t(\mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{X}) \ldots \mathrm{P}_t(\mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{X})$$

Ecrivons $\mathrm{P}(q,t) = \sum_{i\geq 0} a_i(t)q^i$. Pour chaque partition ν, correspondant à une suite $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ on a $n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k$ et $n - \ell(\nu) = \alpha_2 + \ldots + (k-1)\alpha_k$. Rappelons que $d_\nu = 2n - 2\ell(\nu)$. Le calcul qui suit est identique à celui qui a été vu dans le cas du plan affine.

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(q,t) &= \sum_n q^n \mathrm{P}_t(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})) \\
&= \sum_{n,\nu \in \mathrm{Part}(n)} q^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k} t^{2\alpha_2 + \ldots + 2(k-1)\alpha_k} a_{\alpha_1}(t) \ldots a_{\alpha_k}(t) \\
&= \prod_{k\geq 1} \mathrm{P}(q^k t^{2k-2}, t)
\end{aligned}$$

7. Cohomologie d'intersection

Cette section repose sur la lecture de [4]. Le théorème en vue est le théorème 53 qui donne la description de l'image directe du complexe d'intersection pour un morphisme semi-petit.

(7.1) *Pseudo-variétés*

DÉFINITION 29. — *Un ensemble simplicial est la donnée d'un ensemble* K *muni d'un ensemble de parties, appelée simplexes, satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *toute partie réduite à un élément est un simplexe ;*

(ii) *Toute partie d'un simplexe est un simplexe.*

La dimension d'un simplexe c est $\#c - 1$. Un ensemble simplicial est dit localement fini si les sommets appartiennent au plus à un nombre fini de simplexes.

DÉFINITION 30. — *Si* K *est un ensemble simplicial, le sous-espace topologique* $|\mathrm{K}| \subset \mathbb{R}^{(\mathrm{K})}$ *obtenu comme réunion des enveloppes convexes* $|s|$ *des simplexes* s *de* K, *et muni de la topologie finale pour les inclusions* $|s| \hookrightarrow |\mathrm{K}|$ *s'appelle la réalisation géométrique de* K.

Ces sous-espaces $|s|$ sont appelés simplexes géométriques. Cet espace topologique $|\mathrm{K}|$ est localement compact si et seulement si K est localement fini.

Un polyèdre est un espace topologique X muni d'une triangulation T, c'est-à-dire d'un homéomorphisme avec la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial. Deux triangulations $\mathrm{T} : |\mathrm{K}| \to \mathrm{X}$ et $\mathrm{T}' : |\mathrm{K}'| \to \mathrm{X}$ sont dites équivalentes si l'homéomorphisme $\mathrm{T}'\mathrm{T}^{-1} : |\mathrm{K}| \to |\mathrm{K}'|$ est donné, après subdivision éventuelle de K, par des applications linéaires sur les simplexes de $|\mathrm{K}|$.

DÉFINITION 31. — *Une classe d'équivalence de triangulations sur l'espace topologique* X *s'appelle une structure* PL.

Etant donné un espace topologique X muni d'une structure PL, les sous-espaces fermés de X sont des réunions de simplexes géométriques d'une triangulation T compatible avec la structure PL. Les ouverts complémentaires de ces fermés constituent une base pour la topologie de X. Les ouverts considérés seront toujours des ouverts de ce type.

DÉFINITION 32. — *Etant donné un espace topologique* X *muni d'une structure* PL, *une stratification de dimension* n *de* X *est la donnée d'une filtration par des sous-espaces fermés*

$$X \supseteq X^1 \supseteq \ldots \supseteq X^n$$

tels que pour $i \geq 1$, *tout point* $x \in X^i - X^{i+1}$ *ait un voisinage* PL*−isomorphe à* $B_{n-i} \times Y$ *où*

$$Y \supseteq Y^1 \supseteq \ldots \supseteq Y^i = \text{point}$$

est un sous-espace muni d'une stratification de dimension $n-i$ *et où* B_{n-i} *est la boule* PL *(fermée) de dimension* $n-i$, *par un homéomorphisme compatible avec les filtrations.*

L'espace Y est le cône d'un espace topologique Z muni d'une stratification de dimension $i-1$. Si $X^i - X^{i+1}$ n'est pas vide, c'est une variété de dimension $n-i$ qu'on appelle strate. On notera $(0, x)$ le point correspondant x dans l'homéomorphisme PL ci-dessus. Si $X - X^1$ est dense dans X, on dit que X est pur de dimension n.

DÉFINITION 33. — *Un espace topologique est une pseudo-variété de dimension* n *s'il est homéomorphe à un espace* PL *muni d'une stratification de dimension* n *de* X *telle que* $X^1 = X^2$ *et telle que* $X - X^1$ *soit dense dans* X.

Les variétés algébriques complexes irréductibles X de dimension n sont des pseudo-variétés de dimension $2n$ d'après le théorème de triangulation des variétés d'Hironaka [6].

(7.2) *Chaînes simpliciales*

Pour tout entier $q \geq 0$, on désigne par $[q]$ l'ensemble simplicial $\{0, \ldots, q\}$ avec pour simplexes toutes les parties, et par Δ_q sa réalisation géométrique. Soit X un espace PL de dimension n, et $T : |K| \simeq X$ une triangulation de X compatible avec la structure PL. Une q−chaîne simpliciale entière (resp. rationnelle) de T est une combinaison linéaire finie $\xi = \sum_c n_c c$ de simplexes $c : [q] \to K$ non dégénérés où $n_c \in \mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$). Une telle chaîne simpliciale est déterminée par la chaîne géométrique $\sum n_c |c|$ associée, où $|c| : \Delta_q \to X$ est le simplexe géométrique associé au simplexe $c : [q] \to X$. On désigne par $S_q^T(X)$ le groupe des q−chaînes simpliciales de T. Si T′ est une subdivision de T, on a un homomorphisme de

subdivision $\mathrm{Sd} : \mathrm{C}^{\mathrm{T}}(\mathrm{X}) \to \mathrm{C}^{\mathrm{T}'}(\mathrm{X})$. On obtient ainsi un système inductif ce qui permet de définir

$$\mathrm{S}_q(\mathrm{X}) = \varinjlim_{\mathrm{T}} \mathrm{S}_q^{\mathrm{T}}(\mathrm{X})$$

où T parcourt les triangulations T de X compatibles avec la structure PL. Le support $|\xi|$ d'une chaîne $\xi = \sum_c n_c c$ est la réunion des images des simplexes $|c|$ tels que $n_c \neq 0$.

Si Y est un sous-espace fermé PL de X, le groupe $\mathrm{S}_q(\mathrm{Y})$ s'identifie au sous-groupe des chaînes simpliciales $\sum_c n_c c$ de X telles que l'image de $|c|$ soit contenue dans Y. Le quotient $\mathrm{S}_q(\mathrm{X})/\mathrm{S}_q(\mathrm{Y}) = \mathrm{S}_q(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est le groupe des chaînes relatives. Si U est le complémentaire d'un sous-espace fermé Y on pose

$$\mathrm{S}_q(\mathrm{U}) = \mathrm{S}_q(\mathrm{X}, \mathrm{X} - \mathrm{U})$$

Du fait qu'on autorise des subdivisions, les chaînes relatives de U se représentent par des chaînes de $\overline{\mathrm{U}}$ qui sont combinaison linéaires de simplexes de $\overline{\mathrm{U}}$ qui rencontrent U. Ainsi, dans ce contexte, le théorème d'excision est gratuit. Le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{U} \mapsto \mathrm{S}_q(\mathrm{U})$ est noté $\mathcal{D}^{n-q}$. On a morphisme canonique

$$\mathrm{S}_p(\mathrm{X}) \to \Gamma_c(\mathrm{X}, \mathcal{D}^{n-p})$$

PROPOSITION 34. — *Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme, et induit un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}_p(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}_c^{n-p}(\mathrm{X}, \mathcal{D}^{\cdot})$$

Le complexe $\mathcal{D}^{\cdot}$ s'appelle le complexe dualisant.

Le terme de droite représente l'hypercohomologie à valeurs dans le complexe $\mathcal{D}^{\cdot}$. En particulier, si X est connexe, on a un isomorphisme $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X}, \mathcal{D}^{\cdot}) \simeq \mathbb{Z}$.

Démonstration. Ceci résulte du fait que pour tout entier i, le faisceau $\mathcal{D}^i$ est un faisceau fin. On a alors $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathcal{D}^i) = 0$, pour $q > 0$ et donc la suite spectrale d'hypercohomologie dégénère. □

Les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^q$ du complexe $\mathcal{D}^{\cdot}$ sont en général compliqués. Pour les décrire, on doit introduire pour chaque ouvert U de X le groupe $\mathrm{S}_q^c(\mathrm{U})$ des

q-chaînes simpliciales $\sum_c n_c c$, où c est un simplexe dont la réalisation géométrique est contenue dans U, et le groupe quotient $S_q(X, U) = S_q(X)/S_q^c(U)$. Ceci définit un complexe $S_.(X, U)$ dont l'homologie relative en dimension q est isomorphe à l'homologie relative $H_q(X, U)$. Pour tout entier q, on a

$$\mathcal{H}_x^q = H_{n-q}(X, X - \{x\}).$$

Si X est une pseudo-variété de dimension n, le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^0(\mathcal{D}\cdot)$ est localement constant sur un ouvert dont le complémentaire est de codimension ≥ 2. Si X est une variété topologique de dimension n, ce qui revient à dire que si $T : |K| \to X$ est une triangulation, tout $n-1$ simplexe est une face d'exactement deux n simplexes, c'est le seul faisceau de cohomologie non nul et il est localement constant ; on l'appelle le faisceau d'orientation, et on le note Or. La proposition ci-dessus fournit alors un isomorphisme

$$H_q(X) \simeq H_c^{n-q}(X, Or).$$

C'est le théorème de dualité de Poincaré.

(7.3) *Le complexe d'intersection* $IC_.(X)$

Soit X un espace topologique équipé d'une structure PL, et muni d'une stratification X^i de dimension n telle que $X^1 = X^2$.

DÉFINITION 35. — *Une $q-$chaîne simpliciale*

$$\xi = \sum_c n_c c$$

de X *est permise si pour tout* $i \geq 2$

$$\dim |\xi| \cap X^i \leq q - i + p(i) \quad et \quad \dim |\partial\xi| \cap X^i \leq q - 1 - i + p(i)$$

où $p(i) = [\frac{i-2}{2}]$.

Ce coefficient $p(i)$ s'appelle la perversité. Ce coefficient peut être remplacé par n'importe quelle suite croissante d'entiers telle que $p(i+1) - p(i) \leq 1$ et $p(2) = 0$. La perversité choisie s'appelle perversité moitié et est adaptée au cas des variétés algébriques complexes. On désigne par $IC_q(X)$ le groupe des chaînes simpliciales

permises. On obtient ainsi un complexe $\mathrm{IC}_\bullet(\mathrm{X})$ appelé complexe d'intersection, et son homologie est l'homologie d'intersection, notée $\mathrm{IH}_p(\mathrm{X})$.

Plus généralement, étant donné un ouvert U (défini par le complémentaire d'un sous-espace fermé PL de X) on définit le complexe $\mathrm{IC}_.(\mathrm{U}) = \mathrm{IC}_.(\mathrm{X}, \mathrm{X} - \mathrm{U})$ dont les éléments se représentent par des chaînes simpliciales de $\mathrm{S}_.(\mathrm{X})$ dont le support rencontre U : on impose la condition de transversalité à perversité près pour la stratification induite sur l'ouvert U. On désigne par $\mathcal{J}^{n-p}$ le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{U} \mapsto \mathrm{IC}_p(\mathrm{U})$. On obtient ainsi un complexe de faisceaux sur X et des morphismes

$$\mathrm{IC}_p(\mathrm{X}) \to \Gamma_c(\mathrm{X}, \mathcal{J}^{n-p})$$

Comme dans le cas où on n'impose pas de condition de transversalité, le faisceau $\mathcal{J}^p$ est encore un faisceau fin, et on a encore le résultat suivant :

PROPOSITION 36. — *Le morphisme canonique* $\mathrm{IC}_p(\mathrm{X}) \to \Gamma_c(\mathrm{X}, \mathcal{J}^{n-p})$ *est un isomorphisme ; il induit un isomorphisme*

$$\mathrm{IH}_p(\mathrm{X}) \simeq \mathrm{H}_c^{n-p}(\mathrm{X}, \mathcal{J}^\cdot)$$

On doit encore introduire pour chaque ouvert autorisé $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ le complexe $\mathrm{IC}_.^c(\mathrm{U})$ des chaînes simpliciales (finies) de U qui satisfont à la condition de transversalité à perversité près, et le quotient $\mathrm{IC}_q(\mathrm{X}, \mathrm{U}) = \mathrm{IC}_q(\mathrm{X})/\mathrm{IC}_q^c(\mathrm{U})$. On obtient ainsi un complexe $\mathrm{IC}_*(\mathrm{X}, \mathrm{U})$ dont l'homologie est notée $\mathrm{IH}_p(\mathrm{X}, \mathrm{U})$. La fibre du faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^p(\mathcal{J}^\cdot)_x$ du complexe $\mathcal{J}^\cdot$ s'interprète encore, en degré q, comme l'homologie relative $\mathrm{IH}_{n-q}(\mathrm{X}, \mathrm{X} - \{x\})$.

LEMME 37. — *Soit x un point appartenant à la strate de codimension i. On a*

$$\mathrm{IH}_j(\mathrm{X}, \mathrm{X} - \{x\}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j < n - p(i) \\ \mathrm{IH}_{j-n+i}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y} - \{x\}) & \text{si} \quad j \geq n - p(i) \end{cases}$$

Esquisse de preuve

On a un voisinage ouvert V isomorphe à $\mathrm{B}_{n-i} \times \mathrm{Y}$, où Y est un espace stratifié de dimension i. Comme dans le théorème d'Eilenberg-Zilber, l'application

$$\mathrm{S}_*(\mathrm{B}_{n-i}, \mathrm{B}_{n-i} - \{0\}) \otimes \mathrm{IC}_*(\mathrm{Y}, \mathrm{Y} - \{x\}) \to \mathrm{IC}_*(\mathrm{X}, \mathrm{X} - \{x\})$$

qui envoie $\alpha \otimes \beta$ sur le produit cartésien $\alpha \times \beta$ des chaînes est une équivalence d'homotopie. Il résulte de la formule de Künneth que l'homologie est nulle en degré $j < n - i$, et isomorphe à $\mathrm{IH}_{j-n+i}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y} - \{x\})$ en degré $j \geq n - i$. Mais si β est une chaîne de dimension q, la dimension de $|\beta| \cap \{x\}$ est $\leq q - i + p(i)$ et par conséquent pour $q < i - p(i)$ la chaîne β ne rencontre pas la strate de codimension i. Autrement dit, $\mathrm{IH}_j(\mathrm{X}, \mathrm{X} - \{x\})$ est nul si $j < n - p(i)$.

DÉFINITION 38. — *On pose* $\mathrm{IH}^q(\mathrm{X}) = \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathcal{I}^{\cdot})$.

Si X est une variété de dimension n, il n'y a plus de condition de transversalité : le complexe $\mathrm{IC}_{\cdot}(\mathrm{X})$ coïncide avec le complexe $\mathrm{S}_{\cdot}(\mathrm{X})$ des chaînes simpliciales.

(7.4) *Propriété de recollement*

On considère la suite croissante d'ouverts $\mathrm{U}_k = \mathrm{X} - \mathrm{X}^k$. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur X, la restriction $\mathcal{F}_{|\mathrm{U}_k}$ est notée $\mathcal{F}_k$. On désigne par $i_k : \mathrm{U}_k \hookrightarrow \mathrm{U}_{k+1}$ l'inclusion canonique. Soit $j_k : \mathrm{X}^k - \mathrm{X}^{k+1} \hookrightarrow \mathrm{U}_{k+1}$ l'inclusion de la strate de codimension $n - k$ dans l'ouvert U_{k+1}. Cette inclusion est celle d'un sous-espace fermé ; le complémentaire dans U_{k+1} est l'ouvert U_k.

LEMME 39. — *Le morphisme*

$$\mathcal{I}_{k+1} \to \mathrm{R}i_{k*}i_k^*(\mathcal{I}_{k+1})$$

induit par l'inclusion ouverte i_k est un quasi-isomorphisme en degré $\leq p(k)$.

Démonstration. Il n'y a rien à démontrer pour $k = 0$. Puisque les faisceaux $\mathcal{I}_{\cdot}$ sont fins, le complexe de droite est $i_{k,*}i^*(\mathcal{I}_{k+1})$. On considère un point $x \in \mathrm{X}^k - \mathrm{X}^{k+1}$ et le voisinage distingué $\mathrm{V} = \mathrm{B}_{n-k} \times \mathrm{Y}$ de x, où Y est le cône de Z. On est ramené à étudier le morphisme

$$\mathrm{IC}^{\cdot}(\mathrm{V}) \to \mathrm{IC}^{\cdot}(\mathrm{V} - (\mathrm{B}_{n-k} \times \{x\}))$$

Considérons l'équivalence d'homotopie

$$\mathrm{S}_{\cdot}(\mathrm{B}_{n-k}, \mathrm{S}_{n-k-1}) \otimes \mathrm{IC}_{\cdot}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z} \cup \{x\}) \to \mathrm{IC}_{\cdot}(\mathrm{V} - (\mathrm{B}_{n-k} \times \{x\}))$$

qui associe à $\alpha \otimes \beta$ le produit cartésien $\alpha \times \beta$. Une chaîne $z \in \mathrm{IC}_q(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ s'écrit $\xi = \sum_c n_c c$ où les simplexes c qui rencontrent le sommet x du cône et tels que

$n_c \neq 0$ satisfont à $\dim c \cap \{x\} \leq q - k + p(k)$ ie $q \geq k - p(k)$. Une chaîne $z \in \mathrm{IC}_q(\mathrm{Y}, \mathrm{Z} \cup \{x\})$ se représentent par une chaîne simpliciale $\xi = \sum_c n_c c$ qui ne satisfait pas obligatoirement à cette condition de transversalité. Une telle chaîne provient donc de $\mathrm{IC}_q(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ quand $q \geq k - p(k)$. Il en résulte qu'en dimension $j \geq n - p(k)$, l'application ci-dessus est un isomorphisme en homologie. Par suite

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{IC}^{\cdot}(\mathrm{V})) \to \mathrm{H}^j(\mathrm{IC}^{\cdot}(\mathrm{V} - (\mathrm{B}_{n-k} \times \{x\}))$$

est un isomorphisme dès que $j \leq p(k)$. Ceci démontre le lemme. □

(7.5) *Caractérisation du complexe* $\mathcal{J}^{\cdot}$.

Soit X une pseudo-variété de dimension n, sur laquelle on dispose d'une stratification X^i.

DÉFINITION 40. — *Etant donné un complexe* $\mathcal{S}^{\cdot}$ *de faisceaux groupes abéliens sur* X, *on dit que* $\mathcal{S}^{\cdot}$ *est constructible relativement à la stratification donnée si les faisceaux de cohomologie du complexe* $\mathcal{S}^{\cdot}|_{\mathrm{X}^i - \mathrm{X}^{i+1}}$ *sont localement constant, et si la fibre en un point* x *est un groupe abélien de type fini.*

On pose $\Sigma = \mathrm{X}^{n-2}$. Alors le complexe d'intersection $\mathcal{S}^{\cdot} = \mathcal{J}^{\cdot}$ est un complexe borné, constructible qui satisfait aux conditions [AX1] suivantes :

(a) La restriction $\mathcal{S}^{\cdot}|_{\mathrm{X}-\Sigma}$ est quasi-isomorphe à un faisceau localement constant $\mathcal{L}$.

(b) (Borne inférieure) $\mathcal{H}^i(\mathcal{S}^{\cdot}) = 0$ si $i < 0$.

(c) (Condition d'annulation) $\mathcal{H}^j(\mathcal{S}_{k+1}) = 0$ si $j > p(k)$.

(d) Attachement : le morphisme

$$\mathcal{S}_{k+1} \to \mathrm{R}i_{k*}i_k^*(\mathcal{S}_{k+1})$$

induit par l'inclusion ouverte i_k est un quasi-isomorphisme en degré $\leq p(k)$.

La condition (d) peut être remplacée par la condition suivante :

(d') le faisceau de cohomologie à support dans le fermé $\mathrm{X}^k - \mathrm{X}^{k+1}$ de U_{k+1} défini par

$$\mathcal{H}^q_{\mathrm{X}^k - \mathrm{X}^{k+1}}(\mathcal{S}_{k+1})$$

s'annule pour $q \leq p(k) + 1$.

La condition (d') est encore équivalente à la condition suivante, qui fait intervenir l'hypercohomologie $\mathcal{H}^q_{\{x\}}(\mathcal{S}^\cdot)$ à support dans $\{x\}$:

(d") Pour tout $k \geq 2$,

$$\mathcal{H}^q_{\{x\}}(\mathcal{S}^\cdot) = 0 \quad \text{si} \quad q \leq n - k + p(k) + 1$$

Ce groupe représente l'hypercohomologie à support compact d'un petit voisinage ouvert de x à valeurs dans $\mathcal{S}^\cdot$. Plus précisément, si $i : \mathrm{X} - \{x\} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est l'inclusion canonique, on a une suite exacte longue

$$\ldots \to \mathcal{H}^q_{\{x\}}(\mathcal{S}^\cdot) \to \mathcal{H}^q(\mathcal{S}^\cdot_x) \to \mathcal{H}^q(\mathrm{R}i_*(i^*(\mathcal{S}^\cdot))_x) \to \ldots$$

Désignons par $\mathbf{D}^b(\mathrm{X})$ la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens, dont les objets sont les complexes bornés de groupes abéliens sur X. Un morphisme $\mathrm{A}^\cdot \to \mathrm{B}^\cdot$ dans $\mathbf{D}^b(\mathrm{X})$ est la donnée d'une classe d'équivalence de diagrammes de morphismes de complexes $\mathrm{A}^\cdot \leftarrow \mathrm{C}^\cdot \to \mathrm{B}^\cdot$ tels que $\mathrm{A}^\cdot \leftarrow \mathrm{C}^\cdot$ soit un quasi-isomorphisme. Deux tels diagrammes $\mathrm{A}^\cdot \leftarrow \mathrm{C}_1^\cdot \to \mathrm{B}^\cdot$ et $\mathrm{A}^\cdot \leftarrow \mathrm{C}_2^\cdot \to \mathrm{B}^\cdot$ sont équivalents s'il existe un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{C}_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr] & \\
\mathrm{A} & \mathrm{C} \arrow[l, "f"'] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{B} \\
 & \mathrm{C}_2 \arrow[ul, "f_2"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où f est un quasi-isomorphisme. Tout complexe borné de groupe abéliens a une résolution injective finie. Ceci permet par exemple de définir les foncteurs $\mathrm{R}f_*, \mathrm{RHom}^\cdot(\mathrm{A}^\cdot, -), \mathrm{R}f_!$ en restant dans la catégorie des complexes bornés.

THÉORÈME 41. — *(Deligne) Le foncteur* $\mathcal{S}^\cdot \mapsto \mathcal{H}^0(\mathcal{S}^\cdot))_{|\mathrm{X}-\Sigma}$ *est une équivalence de catégories entre la sous-catégorie de* $\mathbf{D}^b(\mathrm{X})$ *des complexes* $\mathcal{S}^\cdot$ *de faisceaux de groupes abéliens qui satisfont aux conditions (a)-(d) et celle des faisceaux localement constants sur* $\mathrm{X} - \Sigma$.

Ainsi, pour récupérer le complexe $\mathcal{I}_{k+1}$ à partir de $\mathcal{I}_k$ on considère le complexe $\tau_{\leq p(k)} Ri_{k*}(\mathcal{I}_k)$ obtenu par image directe et tronqué en degré $> p(k)$. Cet énoncé signifie que le complexe est bien défini à isomorphisme près dans la catégorie dérivée par le système local $\mathcal{H}^0(\mathcal{I}^\cdot)$ c'est-à-dire par le faisceau d'orientation de $X - \Sigma$.

(7.6) *Indépendance de la stratification*

La caractérisation ci-dessus fait intervenir la stratification. Le complexe d'intersection $\mathcal{I}^\cdot$ peut être caractérisé, dans la catégorie dérivée, en termes uniquement topologiques.

Soit X une pseudo-variété de dimension n, et Or le faisceau d'orientation, défini sur l'ouvert U de X le faisceau $\mathcal{H}^0(\mathcal{S}^\cdot)$ est localement constant.

La cohomologie d'intersection satisfait aux axiomes [AX2] suivants

(a) En dehors d'un fermé Σ de codimension ≥ 2, $\mathcal{I}^\cdot|_{X-\Sigma} \simeq \mathrm{Or}$.

(b) (Borne inférieure) On a $\mathcal{H}^q(\mathcal{I}^\cdot) = 0$ si $q < 0$.

(c) (Condition de support) Pour $i \geq 1$, le support de $\mathcal{H}^i(\mathcal{I}^\cdot)$ est de codimension $\geq 2i + 2$.

(d) (Condition de cosupport) Pour tout $i < n$, le fermé des points x tels que $\mathcal{H}^i_{\{x\}}(\mathcal{I}^\cdot) \neq 0$ est de codimension $\geq 2n - 2i + 1$.

Ces propriétés caractérisent le complexe $\mathcal{I}^\cdot$ dans la catégorie dérivée.

(7.7) *Dualité de Verdier*

On suppose que X est une pseudo-variété de dimension n, orientable et munie d'une orientation : ceci signifie que le faisceau d'orientation Or sur $X - \Sigma$ est trivial et muni d'une trivialisation ; c'est-à-dire qu'on a choisi un quasi-isomorphisme

$$\underline{\mathbb{Q}}_{X-\Sigma} \to \mathcal{D}_{X-\Sigma}.$$

On travaille en cohomologie d'intersection à coefficients rationnels. On considère ici la perversité complémentaire de la perversité moitié $p^+(k) = [\frac{k-1}{2}]$, et le complexe d'intersection $\mathcal{J}^\cdot$ construit à partir de cette perversité. On peut construire un morphisme

$$\mathcal{I}^\cdot \otimes^{\mathrm{L}} \mathcal{J}^\cdot \to \mathcal{D}^\cdot$$

en étendant l'accouplement canonique $\underline{\mathbb{Q}}_{X-\Sigma} \otimes \underline{\mathbb{Q}}_{X-\Sigma} \to \underline{\mathbb{Q}}_{X-\Sigma}$ sur $X - \Sigma$ et en utilisant la construction par image directe et troncature. Ici le foncteur $\otimes^{\mathrm{L}}$ désigne le foncteur dérivé gauche du produit tensoriel.

THÉORÈME 42. — *[2] Le morphisme canonique*

$$\mathcal{I}^{\cdot} \to \mathrm{RHom}^{\cdot}(\mathcal{J}^{\cdot}, \mathcal{D}^{\cdot})$$

est un isomorphisme dans la catégorie dérivée.

Le second faisceau s'appelle le dual de Verdier de $\mathcal{I}$, et est noté $\mathfrak{D}(\mathcal{J}^{\cdot})$. Plus généralement, si $\mathcal{I}_{\overline{p}}$ est le complexe d'intersection relatif à la perversité $\overline{p}$, si $\overline{p}$ et $\overline{q}$ sont des perversités complémentaires, c'est-à-dire telles que $\overline{p}(k) + \overline{q}(k) = k - 2$, le complexe $\mathcal{I}_{\overline{q}}$ est le dual de Verdier de $\mathcal{I}_{\overline{p}}$.

En général, le morphisme canonique $\mathcal{I}^{\cdot} \to \mathcal{J}^{\cdot}$ n'est pas un quasi-isomorphisme. Ceci arrive par exemple quand X peut être munie d'une stratification de dimension n telle que $X^{2k-1} = X^{2k}$. Ainsi, pour les variétés algébriques complexes, on a $\mathcal{I}^{\cdot} = \mathcal{J}^{\cdot}$ Plus généralement :

DÉFINITION 43. — *On dit que* X *est un espace de Witt rationnel si le morphisme canonique* $\mathcal{I}^{\cdot} \to \mathcal{J}^{\cdot}$ *est un quasi-isomorphisme.*

Dans ce cas, on a une dualité

$$\mathcal{I}^{\cdot} \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{I}^{\cdot})$$

COROLLAIRE 44. — *Soit* X *une pseudo-variété compacte de dimension* n *; on suppose que* X *est un espace de Witt rationnel. Alors, pour* $i + j = n$ *on a un accouplement*

$$\mathrm{IH}^i(X) \otimes \mathrm{IH}^j(X) \to \mathbb{Q}$$

qui fait d'un de ces espaces vectoriels le dual de l'autre.

La caractérisation de $\mathcal{I}^{\cdot}$ est plus simple pour les espaces de Witt. On voit en effet que $\mathcal{I}^{\cdot}$ satisfait aux axiomes [AX3] suivants :

(a) En dehors d'un fermé Σ de codimension ≥ 2, $\mathcal{I}^{\cdot}|_{X-\Sigma} \simeq \mathrm{Or}$.

(b) (Borne inférieure) On a $\mathcal{H}^q(\mathcal{I}^{\cdot}) = 0$ si $q < 0$.

(c) (Condition de support) Pour $i \geq 1$, le support de $\mathcal{H}^i(\mathcal{I}^{\cdot})$ est de codimension $\geq 2i + 2$.

(d) (Dualité) Il existe un isomorphisme dans $\mathbf{D}^b(X)$

$$\mathcal{I}^{\cdot} \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{I}^{\cdot}).$$

THÉORÈME 45. — *Si $\mathcal{S}^\cdot$ est un complexe constructible de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels qui satisfait aux axiomes* [AX3] *ci-dessus, $\mathcal{S}^\cdot$ est isomorphe dans $\mathbf{D}^b(\mathrm{X})$ au complexe d'intersection $\mathcal{I}^\cdot$, et X est un espace de Witt rationnel.*

Il suffit en effet de constater que l'axiome (d) de [AX2] est satisfait. Mais ceci se voit en utilisant la dualité (d).

COROLLAIRE 46. — *Soit X une variété algébrique complexe quotient d'une variété lisse par l'action d'un groupe fini. Alors le complexe d'intersection $\mathcal{I}^\cdot$ de X est isomorphe au complexe dualisant $\mathcal{D}^\cdot$.*

Démonstration. Un tel quotient en lisse en homologie rationnelle. Il en résulte que le complexe dualisant $\mathcal{D}$ satisfait aux axiomes [AX3]. Donc $\mathcal{I}^\cdot \simeq \mathcal{D}^\cdot$. □

(7.8) *Complexe d'intersection à valeurs dans un système local*

On suppose pour simplifier que l'ouvert $\mathrm{U} = \mathrm{X} - \Sigma$ est connexe. On considère sur U un faisceau de groupes abéliens (ou de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels) $\mathcal{R}$ localement constant. Soit $\pi : \widetilde{\mathrm{U}} \to \mathrm{U}$ le revêtement universel sur lequel agit le groupe de Poincaré $\mathrm{G} = \pi_1(\mathrm{U})$. La donnée de $\mathcal{R}$ équivaut à celle d'un groupe abélien R et d'une action de π sur R.

Soit T une triangulation de X compatible avec la structure PL. Un $q-$simplexe $|c| : \Delta_q \to \mathrm{X}$ de T qui rencontre X^i en dimension $\leq q - i + p(i)$, ne peut être contenu dans Σ : il rencontre l'ouvert $\mathrm{X} - \Sigma$ et par suite, si $q > 0$, la restriction $c^o : \Delta_q^o \to \mathrm{X}$ à l'intérieur de Δ_q prend ses valeurs dans U. Si $q = 0$ il définit un point de U. On peut donc considérer pour $q > 0$ le groupe $\mathrm{IC}_q^{\mathrm{T}}(\widetilde{\mathrm{U}}, \mathrm{R})$ des chaînes finies $z = \sum_{c'} n_{c'} c'$ où $c' : \Delta_q^o \to \widetilde{\mathrm{U}}$ est une application continue telle que $\pi(c')$ soit induite par un simplexe c de T, satisfaisant aux conditions de transversalité permises

$$\dim |c| \cap \mathrm{X}^i \leq q - i + p(i) \quad \text{et} \quad \dim |\partial c| \cap \mathrm{X}^i \leq q - 1 - i + p(i)$$

et où les coefficients $n_{c'}$ appartiennent à R. Quand $q = 0$, le groupe $\mathrm{IC}_0(\mathcal{R})$ est le groupe des combinaisons linéaires finies

$$\sum_{a \in \widetilde{\mathrm{U}}, \pi(a) \in \mathrm{T}} n_a a$$

à coefficients dans R, indexées par les points de $\widetilde{U}$ se projetant sur un sommet de T.

Le groupe de Poincaré G opère sur $IC_q^T(\widetilde{U}, R)$.

DÉFINITION 47. — *On appelle groupe des chaînes simpliciales de* T *à coefficients dans* $\mathcal{R}$ *le conoyau* $IC_q^T(X, \mathcal{R})$ *du morphisme*

$$\mathbb{Z}[G] \otimes IC_q^T(\widetilde{U}, R) \to IC_q^T(\widetilde{U}, R)$$

défini par $g \otimes z \to gz - z$, *où* $g \in G$, *et* $z \in IC_q(\widetilde{U}, R)$.

On obtient ainsi un système inductif indexé par les triangulations de X compatibles avec la structure PL. On pose

$$IC_q(X, \mathcal{R}) = \varinjlim_T IC_q^T(X, \mathcal{R})$$

On construit ainsi un complexe $IC_.(X, \mathcal{R})$ appelé complexe d'intersection de X à valeurs dans le système local $\mathcal{R}$. Il résulte des remarques ci-dessus que lorsque $\mathcal{R}$ est le système local trivial, ce complexe est canoniquement isomorphe au complexe $IC_.(X)$.

Si V est le complémentaire d'un sous-espace PL, on définit de même le complexe $IC_.(V, \mathcal{R}) = IC_.(X, X - V; \mathcal{R})$; ceci définit un complexe de préfaisceaux sur X ; le complexe de faisceaux associé s'appelle complexe d'intersection à valeurs dans le système local $\mathcal{R}$ et est noté $\mathcal{I}^{\cdot}(\mathcal{R})$. Il satisfait encore aux axiomes [AX1] et donc peut se construire par une suite d'images directes et troncatures à partir de $\mathcal{R} \otimes Or$. Il en résulte que ceci peut se définir indépendamment de tout choix d'une structure PL, par exemple directement sur une variété algébrique complexe munie d'une stratification.

(7.9) *Petits morphismes*

Si X est une variété algébrique complexe irréductible, on note $\mathcal{I}_X^{\cdot}$ le complexe d'intersection, bien défini dans la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbb{Q}$−espaces vectoriels constructibles.

DÉFINITION 48. — *Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme surjectif de variétés algébriques complexes irréductibles de dimension n, avec Y non singulière. On dit que f est petit si pour tout entier $r > 0$*

$$\operatorname{codim}\{x, \dim f^{-1}(x) \geq r\} > 2r.$$

DÉFINITION 49. — *Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme propre surjectif de variétés algébriques complexes irréductibles de dimension n. Soit $\mathcal{I}_{\mathrm{Y}}$ le complexe d'intersection (relatif à la perversité moitié). On dit que f est homologiquement petit si pour $q > 0$*

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp}(\mathrm{R}^q f_*(\mathcal{I}_{\mathrm{Y}}))) > q.$$

Le faisceau $\mathrm{R}^q f_*(\mathcal{I}_{\mathrm{Y}}))$ désigne ici le $q-$ième faisceau de cohomologie de $\mathrm{R}f_*(\mathcal{I}_{\mathrm{Y}})$, c'est-à-dire le $q-$ième faisceau hyperdérivé.

PROPOSITION 50. — *Si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un petit morphisme, f est homologiquement petit.*

Démonstration. Puisque Y est lisse, le complexe d'intersection est réduit au faisceau d'orientation, et donc trivial. Le support de $\mathrm{R}^q f_*(\mathbb{Q})$ est contenu dans fermé des points $x \in \mathrm{X}$ tels que $2 \dim f^{-1}(x) \geq q$. De l'hypothèse il résulte que ce support est de codimension $> q$. □

PROPOSITION 51. — *Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme homologiquement petit de degré 1. Alors $\mathrm{R}f_*(\mathcal{I}_{\mathrm{Y}}) = \mathcal{I}_{\mathrm{X}}$.*

Démonstration. Le complexe $\mathrm{R}f_*(\mathcal{I}_{\mathrm{Y}})$ satisfait aux conditions [AX2]. La condtion (a) résulte du fait que f est de degré 1 ; la condition (b) est évidente. La condition (c) résulte de l'hypothèse ci-dessus et de l'hypothèse homologiquement petit, et du fait que $\mathrm{R}f_*(\mathcal{I}_{\mathrm{Y}})$ est $\mathbb{C}$-analytiquement constructible. Reste la condition (d). Mais la dualité de Verdier échange le foncteur $\mathrm{R}f_*$ et le foncteur image directe à support propre $\mathrm{R}f_!$: pour tout complexe $\mathrm{A}^\cdot$ à cohomologie bornée, on a

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{X}}(\mathrm{R}f_*(\mathrm{A}^\cdot)) = \mathrm{R}f_!(\mathfrak{D}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{A}^\cdot))$$

Puisque f est propre, quand on prend pour $\mathrm{A}^\cdot$ le complexe d'intersection sur Y, on voit que le dual de Verdier satisfait aussi à la condition (c) de [AX2], ce qui est équivalent à vérifier la condition (d) de [AX2].

(7.10) *Morphismes semi-petits*

DÉFINITION 52. — *Un morphisme propre surjectif $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ de variétés algébriques complexes de même dimension est dit semi-petit si pour tout entier $\geq r$,*

$$\operatorname{codim}\{x, \dim f^{-1}(x) \geq r\} \geq 2r.$$

Si f est semi-petit, on peut trouver une stratification dont les strates X_ν sont des sous-variétés irréductibles lisses localement fermées satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) Au-dessus de X_ν, le morphisme est topologiquement localement trivial.

(2) Pour tout $x \in \mathrm{X}_\nu$,

$$c_\nu = \operatorname{codim} \mathrm{X}_\nu \geq 2 \dim_{\mathbb{C}} f^{-1}(x).$$

Une strate X_ν est dite essentielle si on a égalité.

Ainsi, le morphisme f est petit s'il n'y a qu'une strate essentielle. Dans la suite, on se fixe une telle stratification. On désigne par $f_\nu : \mathrm{Y}_\nu \to \mathrm{X}_\nu$ le fibré localement trivial induit au-dessus de X_ν et d_ν la dimension réelle de la fibre au-dessus de X_ν. Enfin, soit $j_\nu : \overline{\mathrm{X}}_\nu \hookrightarrow \mathrm{X}$ l'inclusion canonique.

THÉORÈME 53. — *Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme semi-petit. On suppose que X est homologiquement rationnellement lisse. Considérons le fibré localement trivial $f_\nu : \mathrm{Y}_\nu \to \mathrm{X}_\nu$ et le système local $\mathcal{R}_\nu = \mathrm{R}^{d_\nu} f_{\nu *}(\mathbb{Q})$ sur X_ν. Alors on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée*

$$\mathrm{R}f_*(\mathcal{I}_{\mathrm{Y}}) = \oplus_\nu j_{\nu,*}(\mathcal{I}_{\overline{\mathrm{X}_\nu}}(\mathcal{R}_\nu))[-d_\nu]$$

où la somme directe porte sur les strates essentielles.

Cet énoncé est en fait une conséquence d'un théorème de Beilinson, Berstein, Deligne et Gabber qui s'affranchissent de l'hypothèse de lissité sur Y. Sous l'hypothèse de lissité, le complexe $\mathcal{I}_{\mathrm{Y}}$ est quasi-isomorphe au faisceau d'orientation, ce qui rend plus facile le calcul des images directes.

Esquisse de preuve.

On suppose pour simplifier que toutes les strates sont essentielles, ce qui est le cas dans l'application envisagée au §6.

Soit X^k la réunion des adhérences $\overline{X}_\nu$ des strates telles que $d_\nu \geq 2k$, et U_k l'ouvert complémentaire. On a alors $\operatorname{codim} X^k \geq 2k$ et au-dessus de $X^k - X^{k+1}$ la fibre de f est exactement de dimension k. Soient Y^k l'image réciproque de X^k, et V_k l'ouvert image réciproque de U_k.

Commençons par identifier le complexe $Rf_*(\mathcal{J}_{\dot{Y}})$ sur l'ouvert U_2. Considérons le complexe $Rf_*(\mathcal{J})_2$, restriction de $Rf_*(\mathcal{J}^\cdot)$ à l'ouvert U_2. On a le long de $X^1 - X^2$

$$R^q f_*(\mathcal{J}_{\dot{Y}}) = 0 \quad \text{si} \quad q > 2$$

mais $Rf^*(\mathcal{J}^\cdot)_2$ ne satisfait pas obligatoirement à la condition (c) de [AX1], car il faudrait $R^q f_*(\mathcal{J}_{\dot{Y}}) = 0$ si $q \geq 2$. Par contre, le complexe tronqué $\tau_{\leq 1} Rf_*(\mathcal{J}_{\dot{Y}})$ satisfait aux conditions [AX1] : l'axiome (d) se vérifie compte-tenu du fait que V_1 est de codimension 2. Par suite, ce complexe tronqué est isomorphe dans la catégorie dérivée à $\mathcal{J}_{\dot{X}}$. On considère maintenant la somme directe sur U_2

$$\oplus_{\nu, d_\nu = 1} j_{\nu,*}(\mathcal{J}_{\overline{X}_\nu}(\mathcal{R}_\nu))[-2])$$

où $j_\nu : X_\nu \cap U_2 \hookrightarrow U_2$ est encore le morphisme d'inclusion. La cohomologie de $j_{\nu,*}(\mathcal{J}_{\overline{X}_\nu}(\mathcal{R}_\nu))[-2])$ est la cohomologie d'intersection à valeurs dans le système local $\mathcal{R}_\nu$. Puisque les strates sont lisses, cette cohomologie est nulle sauf en degré 2, où elle s'identifie au système local $\mathcal{R}_\nu$. On obtient un isomorphisme dans la catégorie dérivée

$$\oplus_{d_\nu \leq 1} j_{\nu *}(\mathcal{J}^\cdot(\mathcal{R}_\nu))[-d_\nu] \simeq Rf_*(\mathcal{J}_{\dot{Y}})_2$$

On voit bien maintenant comment étendre ce type de raisonnement sur U_{k+1} : on fait une récurrence sur k. Il faut vérifier que le complexe $\tau_{\leq 2k-1}(Rf_*(\mathcal{J}^\cdot)_{k+1})$, restriction de $Rf_*(\mathcal{J}^\cdot)$ à l'ouvert U_{k+1}, et tronqué à l'ordre $2k-1$ est donné par la somme directe

$$\tau_{\leq 2k-1}(Rf_*(\mathcal{J}^\cdot)_{k+1}) = \oplus_{\nu, d_\nu < k} j_{\nu *}(\mathcal{J}_{\overline{X}_\nu}(\mathcal{R}_\nu))[-d_\nu].$$

L'hypothèse de récurrence dit que c'est vrai en restriction à l'ouvert U^k, et on doit pour l'obtenir sur U_{k+1} vérifier que le morphisme canonique

$$R^q f_*(\mathcal{J}_{\dot{Y}})_{k+1} \to Ri_{k*}(Rf_*(\mathcal{J}^\cdot)_k)$$

est un quasi-isomorphisme en degré $\leq 2k-1$ ce qui est évident parce que si $d_\nu = 2k$, l'image réciproque de la strate X_ν est de codimension k. C'est en fait la condition (d). La condition (d) pour chacun des complexes d'intersection ci-dessus conduit alors à l'assertion. On termine comme dans le cas où $k = 1$ en observant que sur U_{k+1} le faisceau hyperdérivé $R^{2k} f_*(\mathcal{I}_Y)$ est donné par

$$R^{2k} f_*(\mathcal{I}_Y) = \oplus_{\nu, d_\nu = 2k} \mathcal{R}_\nu.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

Références

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne *Faisceaux pervers,* Astérisque 100 (1983)

[2] W. Borho et R. MacPherson, *Partial resolutions of nilpotent varieties,* Astérisque 101-102 (1983)

[3] G. Ellingsrud et S.A. Strømme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. 87 (1987), p. 343-352.

[4] M. Goresky et R. MacPherson, *Intersection Homology* Topology 19 (1980) p. 135-162 ; *Intersection homology II*, Invent. Math. 72 (1983), p. 77-129.

[5] L. Göttsche et W. Soergel, *Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces*, Math. Ann. 296 (1993), 235-245.

[6] H. Hironaka, Triangulation of algebraic sets, Proc. Symposium Pure Math. 29, Amer. Math. Soc. (1975) p. 165-185.

[7] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Preliminary version, oct. 1996.

Références

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne *Faisceaux pervers,* Astérisque 100 (1983)

[2] W. Borho et R. MacPherson, *Partial resolutions of nilpotent varieties,* Astérisque 101-102 (1983)

[3] G. Ellingsrud et S.A. Strømme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. 87 (1987), p. 343-352.

[4] M. Goresky et R. MacPherson, *Intersection Homology* Topology 19 (1980) p. 135-162 ; *Intersection homology II*, Invent. Math. 72 (1983), p. 77-129.

[5] L. Göttsche et W. Soergel, *Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces*, Math. Ann. 296 (1993), 235-245.

[6] H. Hironaka, Triangulation of algebraic sets, Proc. Symposium Pure Math. 29, Amer. Math. Soc. (1975) p. 165-185.

[7] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Preliminary version, oct. 1996.