La formule de Göttsche

Joseph Le Potier

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, Case Postale 7012

2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05

Soit X une surface algébrique complexe lisse, quasi-projective. L'objet des exposés est d'expliquer le calcul des nombres de Betti du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ qui paramètre les sous-schémas finis de longueur n de X, et d'en donner des applications. Ces nombres de Betti avaient d'abord été obtenus par L. Göttsche [14] en utilisant les conjectures de Weil et les résultats de G. Ellingsrud et S.A. Strømme décrivant les nombres de Betti dans le cas du plan projectif [7] ; une autre démonstration reposant sur les propriétés de l'homologie d'intersection a ensuite été donnée par L. Göttsche et W. Soergel [13]. Nous nous sommes inspiré de cette démonstration et du cours de H. Nakajima "Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces" [23] ; pour l'homologie d'intersection nous avons suivi essentiellement les articles de M. Goresky et R. MacPherson [12].

Dans le cas d'une surface projective X, nous donnons comme interprétation de la formule de Göttsche la description de la cohomologie du schéma de Hilbert comme représentation irréductible de l'algèbre de Heisenberg associée à l'algèbre de cohomologie de la surface, due à H. Nakajima [24] et I. Grojnowsky [15]. La présentation adoptée ici est proche de celle de M. Lehn [20], dont nous nous sommes inspiré. Toutefois, nous montrons un peu plus : nous montrons que l'isomorphisme naturel obtenu par Göttsche et Soergel entre la cohomologie (à support compact) de $\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}) = \coprod_{n\geq 0} \mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ et la représentation de Fock de l'algèbre de Heisenberg de $\mathrm{H}^*(\mathrm{X})$ est compatible avec l'action de l'algèbre de Heisenberg. Ceci repose sur un calcul de nombre d'intersection dû à Ellingsrud et Strømme [8] qui permet d'identifier la forme d'intersection sur la cohomologie du schéma de Hilbert.

Quand X est une surface K3 dont le groupe de Picard est un groupe cyclique engendré par un fibré inversible L dont la classe de Chern c est telle que $c^2 = 2n - 2$, S.T. Yau et E. Zaslow [29] et A. Beauville [3] donnent une interprétation de la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$, comme nombre de courbes rationnelles (comptées avec multiplicité) du système linéaire complet $|\mathrm{L}|$ associé à L : d'après un résultat récent de B. Fantechi, L. Göttsche, et D. Van Straten [10], la multiplicité de la courbe rationnelle $\mathrm{C} \in |\mathrm{L}|$ n'est autre que la longueur en C du schéma fini des

courbes rationnelles de X de classe fondamentale c.

1. Le résultat de Göttsche

Soit X une surface algébrique quasi-projective lisse et irréductible. On considère le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ des sous-schémas finis de X de longueur n. On sait [9] que c'est une variété algébrique quasi-projective lisse de dimension $2n$. On s'intéresse à la dimension de la cohomologie rationnelle de $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$. Soit $\mathrm{H}^+(\mathrm{X})$ la partie paire de la cohomologie rationnelle de X, et $\mathrm{H}^-(\mathrm{X})$ la partie impaire.

THÉORÈME 1. — *(Göttsche) Soient* $d_+ = \dim \mathrm{H}^+(\mathrm{X})$ *la somme des nombres de Betti d'indice pair de* X*, et* $d_- = \dim \mathrm{H}^-(\mathrm{X})$ *la somme des nombres de Betti d'indice impair. La dimension de* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}), \mathbb{Q})$ *est donnée par*

$$\sum_n q^n \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}), \mathbb{Q}) = \prod_{m \geq 1} \frac{(1+q^m)^{d_-}}{(1-q^m)^{d_+}}$$

On donnera une formule plus précise dans la section 7.2, qui décrit tous les nombres de Betti. En fait, on obtiendra même une description de l'espace vectoriel bigradué $\oplus_n \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}), \mathbb{Q})$.

COROLLAIRE 2. — *Soit pour tout entier* $n \geq 0$, $p(n)$ *le nombre de partitions de* n*. La dimension de la cohomologie de* $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ *est donnée par la formule suivante :*

$$\sum_n q^n \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) = \prod_{m \geq 1} \frac{1}{1-q^m} = \sum_n p(n) q^n$$

Le nombre $p(n)$ de partitions de n est le nombres de suites décroissantes $\nu_1 \geq \ldots \geq \nu_m$ telles que $\sum_i \nu_i = n$.

2. La formule de Macdonald

On désigne par $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ la variété algébrique des cycles effectifs $\sum_x n_x x$ de dimension 0 sur X, de longueur $\sum_n n_x = n$. La formule de Macdonald calcule les nombres de Betti de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ en fonction des nombres de Betti de X. En particulier, elle calcule la somme des nombres de Betti. Pour une formulation simple, il est commode d'introduire comme ci-dessus la série formelle $\sum_{n\geq 0} q^n \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$.

Proposition 3. — *La dimension de la cohomologie de* $\mathrm{S}^n(\mathrm{X})$ *est donnée par la formule suivante*

$$\sum_n q^n \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X}) = \frac{(1+q)^{d_-}}{(1-q)^{d_+}}$$

La démonstration de cette formule repose sur le lemme suivant :

Lemme 4. — *Soit* Y *une variété algébrique sur laquelle opère un groupe fini* G. *La cohomologie rationnelle de* X/G *est donnée par*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}/\mathrm{G}, \mathbb{Q}) = \mathrm{H}^*(\mathrm{Y}, \mathbb{Q})^{\mathrm{G}}$$

Le même résultat est vrai en cohomologie à support compact.

La variété de cycles $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ est le quotient de X^n par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par permutation des facteurs. Désignons par $\pi : \mathrm{X}^n \longrightarrow \mathrm{S}^n\mathrm{X}$ la projection canonique. D'après la formule de Künneth, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\mathrm{T}^n(\mathrm{H}^*\mathrm{X}) = \mathrm{H}^*(\mathrm{X})^{\otimes n} \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^n)$$

défini pour $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$ par $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \mapsto u_1 \times \ldots \times u_n$ où le terme de droite désigne le produit cartésien des classes de cohomologie. Le lemme ci-dessus montre que l'algèbre $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$ s'identifie à l'algèbre des invariants de $\mathrm{H}^*(\mathrm{X})^{\otimes n}$ par l'action du groupe symétrique. Il est plus commode d'utiliser la version duale, même si on perd la structure d'algèbre de $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$. Tout ce qu'on vient de dire est vrai en effet pour l'espace vectoriel gradué $\mathrm{H}^*_c(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$, cohomologie à support compact de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$, et on sait que la cohomologie de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$, tout comme celle de X^n satisfait à la dualité de Poincaré (*cf.* §4.7) : ceci signifie que l'on dispose pour $p+q=4n$ d'un accouplement

$$\mathrm{H}^p_c(\mathrm{S}^n\mathrm{X}) \times \mathrm{H}^q(\mathrm{S}^n\mathrm{X}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

qui fait de l'un de ces espaces vectoriels le dual de l'autre. Il en résulte que l'on peut définir un morphisme image directe $\pi_* : \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^n) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$ surjectif, et dont le noyau est l'espace vectoriel engendré par les classes $g_*u - u$, où $g \in \mathfrak{S}_n$ et $u \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$.

Considérons l'algèbre tensorielle $\mathrm{T}(\mathrm{H}^*\mathrm{X}) = \oplus_n \mathrm{T}^n(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$, et l'espace vectoriel bigradué $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*(\mathrm{X})) = \oplus_n \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$. La somme directe ci-dessus définit une graduation appelée graduation par le poids n ; l'autre graduation est obtenue par le degré cohomologique. On munit cet espace vectoriel d'une structure d'algèbre bigraduée grâce au morphisme image directe associé au morphisme d'addition des cycles

$$\mu : \mathrm{S}^m\mathrm{X} \times \mathrm{S}^n\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{S}^{m+n}\mathrm{X},$$

en posant

$$uv = \mu_*(u \times v)$$

pour $u \in \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^m\mathrm{X})$ et $v \in \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^m\mathrm{X})$. Ceci a un sens puisque le morphisme μ est propre. Cette algèbre est $\mathbb{Z}_2-$commutative au sens suivant : si u et v sont homogènes de degré cohomologique p et q respectivement, on a

$$uv = (-1)^{pq}vu$$

L'algèbre $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre tensorielle $\mathrm{T}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$. Par contre, le morphisme π_* va nous permettre de la considérer comme algèbre quotient :

Lemme 5. — *Le morphisme* $\pi_* : \mathrm{T}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X})) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})$ *est un morphisme d'algèbres dont le noyau est l'idéal bilatère* I *engendré par les crochets* $[u, v] = u \otimes v - (-1)^{pq}v \otimes u$, *où* $u \in \mathrm{H}^*\mathrm{X}$ *et* $v \in \mathrm{H}^*\mathrm{X}$ *sont des éléments homogènes de degré cohomologique* p *et* q *respectivement.*

Démonstration. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}^m \times \mathrm{X}^n \arrow[d, "\pi \times \pi"'] & \simeq & \mathrm{X}^{m+n} \arrow[d, "\pi"'] \\
\mathrm{S}^m\mathrm{X} \times \mathrm{S}^n\mathrm{X} \arrow[r, "\mu"] & & \mathrm{S}^{m+n}\mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

montre que si $u \in \mathrm{T}^n(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$ et $v \in \mathrm{T}^m(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$, on a

$$\begin{aligned}\pi_*(u \otimes v) &= \pi_*(u \times v)\\ &= \mu_*(\pi_*(u) \times \pi_*(v))\\ &= \pi_*(u).\pi_*(v)\end{aligned}$$

Donc π_* est un morphisme d'algèbres. Il est clair que les crochets $[u, v]$ pour u et $v \in \mathrm{H}^*\mathrm{X}$ appartiennent au noyau, puisque $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})$ est une algèbre $\mathbb{Z}_2-$symétrique. Dans l'autre sens, il suffit de vérifier que si $u \in \mathrm{T}^n(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$ et $g \in \mathfrak{S}_n$, l'élément $gu - u$ appartient à cet idéal. Mais si g_1 et $g_2 \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$g_1 g_2 u - u = (g_1 - 1)(g_2 u) + g_2 u - u$$

On est ramené au cas où g est une des transpositions $\tau_{i,i+1}$, et on peut évidemment supposer que u est un tenseur décomposé $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n$. Si on prend $g = \tau_{i,i+1}$ on constate que $gu - u$ est mutiple de $[u_i, u_{i+1}]$, donc il appartient à l'idéal I; ceci achève la démonstration. □

Définition 6. — *L'algèbre bigraduée quotient de* $\mathrm{T}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$ *par l'idéal* I *s'appelle la puissance* $\mathbb{Z}_2-$*symétrique de l'espace vectoriel gradué* $\mathrm{H}^*\mathrm{X}$. *On la note* $\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$.

Lemme 7. — *Désignons par* H^+ *(resp.* H^- *) la partie paire (resp. impaire) de la cohomologie* $\mathrm{H}^*\mathrm{X}$. *On a alors*

$$\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{X}) = \mathrm{SH}^+ \otimes \wedge\mathrm{H}^-$$

où SH^+ *est l'algèbre symétrique habituelle, et* $\wedge\mathrm{H}^-$ *l'algèbre extérieure de* H^-.

Démonstration. D'après les propriétés universelles de l'algèbre symétrique et de l'algèbre extérieure, les inclusions $\mathrm{H}^+ \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$ et $\mathrm{H}^- \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$ s'étendent en des morphismes d'algèbres $\mathrm{SH}^+ \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$ et $\wedge\mathrm{H}^- \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{H}^+\mathrm{X})$. Il en résulte un morphisme d'algèbres $\mathbb{Z}_2-$symétriques

$$\mathrm{SH}^+ \otimes \wedge\mathrm{H}^- \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$$

On construit de même un morphisme d'algèbres dans l'autre sens en utilisant la propriété universelle évidente de $\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$, et on constate sans difficulté que ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre. □

Il en résulte que la dimension de la cohomologie de la puissance symétrique est donnée par la formule

$$\sum_{n\geq 0} q^n \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X}) = (\sum_i q^i \dim \mathrm{S}^i\mathrm{H}^+)(\sum_j q^j \dim \wedge^j \mathrm{H}^-)$$

$$= \frac{(1+q)^{d_-}}{(1-q)^{d_+}}$$

3. Le morphisme de Hilbert-Chow

Soit X une surface algébrique ; si Z est un sous-schéma fini de X, on note lg(Z) la longueur de Z, et, pour $x \in \mathrm{X}$ par Z_x la composante de Z contenant x. Le morphisme de Hilbert-Chow $\pi : \mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}) \to \mathrm{S}^n\mathrm{X}$ est défini par $\mathrm{Z} \mapsto \sum_{x\in\mathrm{X}} \lg(\mathrm{Z}_x)x$. On dispose d'une stratification naturelle de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$. En effet, à un cycle $\mathrm{Z} = \sum_x n_x x$ on associe de manière naturelle une partition de n définie par

$$\nu_1 = \#\{x, n_x \geq 1\}, \nu_2 = \#\{x, n_x \geq 2\}, \ldots$$

On pose

$$\alpha_1 = \#\{x, n_x = 1\}, \alpha_2 = \#\{x, n_x = 2\}, \ldots$$

de sorte que $\alpha_1 = \nu_1 - \nu_2, \alpha_2 = \nu_2 - \nu_3, \ldots, \alpha_k = \nu_k$. Se donner la partition ν revient donc à se donner la suite d'entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Remarquons que le nombre $\ell_\nu = \sum_i \alpha_i = \nu_1$ est le nombre de points appartenant au support du cycle Z, et que l'on a

$$\sum_i i\alpha_i = n.$$

Désignons par $\mathrm{S}^n_\nu\mathrm{X}$ l'ensemble des cycles $\mathrm{Z} \in \mathrm{S}^n(\mathrm{X})$ dont la partition associée est ν. Un tel ensemble sera appelé une strate.

Lemme 8. — *L'ensemble* $\mathrm{S}^n_\nu(\mathrm{X})$ *est localement fermé et lisse de dimension* $2\ell_\nu$. *Le morphisme* π *est topologiquement localement trivial au-dessus de* $\mathrm{S}^n_\nu\mathrm{X}$, *et la fibre au-dessus de* $\mathrm{S}^n_\nu\mathrm{X}$ *est de dimension* $n - \ell_\nu$.

Démonstration. On a évidemment $\overline{\mathrm{S}}^n_\nu \subset \cup_{\ell_\mu \leq \ell_\nu} \mathrm{S}^n_\mu$; plus précisément, l'adhérence $\overline{\mathrm{S}}^n_\nu$ est réunion de strates S^n_μ telles que $\ell_\mu \leq \ell_\nu$. Ceci entraîne en particulier que la réunion $\mathrm{F}_\ell = \cup_{\ell_\nu \leq \ell} \mathrm{S}^n_\nu$ est fermée et que si $\ell_\nu = \ell$, la strate S^n_ν est ouverte dans F_ℓ. Désignons par $\mathrm{S}^m_* \mathrm{X}$ le complémentaire de la diagonale dans $\mathrm{S}^m\mathrm{X}$, ou ce qui revient au même, dans le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathrm{X})$. La variété $\mathrm{S}^n_\nu(\mathrm{X})$ est isomorphe à l'ouvert de

$$\mathrm{S}^{\alpha_1}_* \mathrm{X} \times \mathrm{S}^{\alpha_2}_* \mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{S}^{\alpha_k}_* \mathrm{X}$$

des $(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_k)$ tels que Z_i et Z_j ne se rencontrent pas. La dimension de $\mathrm{S}^n_\nu \mathrm{X}$ est donc $2\ell_\nu$.

Considérons la fibre de π au-dessus du point $\mathrm{Z} = \sum_x n_x x$ de $\mathrm{S}^n_\nu(\mathrm{X})$. Si on désigne par $\pi_x : \mathrm{Hilb}^{n_x}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{S}^{n_x}\mathrm{X}$ le morphisme de Hilbert-Chow, on a un isomorphisme

$$\pi^{-1}(\mathrm{Z}) \simeq \prod_{x \in \mathrm{X}} \pi_x^{-1}(n_x x).$$

D'après un résultat dû à Briançon [5], cette fibre est irréductible de dimension $\sum_x (n_x - 1) = n - \ell_\nu$.

Soit H^n_ν l'image réciproque de S^n_ν, et $\pi_\nu : \mathrm{H}^n_\nu \to \mathrm{S}^n_\nu$ la restriction de π à H^n_ν. Il reste à voir que du point de vue topologique, π_ν est localement trivial. En fait, c'est déjà vrai du point de vue analytique : il suffit de voir que le morphisme $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{S}^n(\mathbb{C}^2)$ est localement trivial au-dessus de la petite diagonale. C'est évident en faisant agir sur $\mathbb{C}^2$ le groupe des translations. □

4. Catégories dérivées

On rappelle ici l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur les catégorie et foncteurs dérivés. On se limite aux foncteurs dérivés à droite.

4.1. La catégorie K(A)

Soit A une catégorie abélienne. On désigne par K(A) la catégorie des complexes de cochaînes de A, à homotopie près : les objets sont les complexes de A, et les morphismes les classes d'homotopie de morphismes de complexes. On désigne pour tout complexe K de A par K[1] le complexe décalé défini par $\mathrm{K}[1]^i = \mathrm{K}^{i+1}$, dont la différentielle est $-d_\mathrm{K}$. Cette catégorie est une catégorie additive, mais ce n'est pas en général une catégorie abélienne.

Cône d'un morphisme

Etant donné un morphisme de complexes $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{L}$ le cône $\mathrm{C} = \mathrm{C}f$ de f est le complexe défini par $\mathrm{C}^i = \mathrm{K}^{i+1} \oplus \mathrm{L}^i$ de différentielle d_{C} donnée par la matrice

$$d_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} -d_{\mathrm{K}} & 0 \\ f & d_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$$

L'inclusion $\mathrm{L} \xrightarrow{u} \mathrm{C}$ et la projection naturelles $\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{K}[1]$ sont des morphismes de complexes, ce qui fournit un triangle de morphismes

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[rr, "f"] & & \mathrm{L} \arrow[dl, "u(f)"] \\ & \mathrm{C} \arrow[ul, "v(f)", "{[+1]}"'] & \end{tikzcd}$$

où la flèche $v = v(f)$ est un morphisme de complexes $\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{K}[1]$. La suite de complexes

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{C}(f) \longrightarrow \mathrm{K}[1] \longrightarrow 0$$

est exacte. Le morphisme de liaison $\delta : \mathrm{H}^i(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathrm{L})$ est le morphisme induit par $-f$.

Exemple : Le cône du morphisme nul $\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{L}$ est la somme directe $\mathrm{K}[1] \oplus \mathrm{L}$.

Lemme 9. — *Si f et $g : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{L}$ sont deux morphismes homotopes, et h une homotopie entre f et g, la suite de morphismes $\mathrm{C}(f) \longrightarrow \mathrm{C}(g)$ défini par*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathrm{K}} & 0 \\ h & \mathrm{id}_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de complexes.

Un triangle de $\mathrm{K}(\mathrm{A})$ est un diagramme de $\mathrm{K}(\mathrm{A})$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[rr, "f"] & & \mathrm{L} \arrow[dl, "u"] \\ & \mathrm{M} \arrow[ul, "{[+1]}", "v"'] & \end{tikzcd}$$

où $v : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{K}[1]$ est un morphisme de complexes. Un tel triangle sera aussi noté $\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{K}[1]$. On définit de manière évidente la notion de morphisme de triangles . Considérons un diagramme de complexes

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & \mathrm{L} \arrow[d, "b"] \\ \mathrm{K}' \arrow[r, "f'"] & \mathrm{L}' \end{tikzcd}$$

commutatif dans K(A), et une homotopie h entre bf et $f'a$: on a donc $f'a - bf = dh + hd$. Alors la famille $\mathrm{C}(f)^i \longrightarrow \mathrm{C}(f')^i$ définie par la matrice

$$c = \begin{pmatrix} a & 0 \\ h & b \end{pmatrix}$$

est un morphisme de complexes, et le triplet (a, b, c) un morphisme de triangles.

Définition 10. — *Un triangle de* K(A) *est dit distingué s'il est isomorphe au cône d'un morphisme de complexes* $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{L}$.

Proposition 11. — *Soit* $0 \longrightarrow \mathrm{K}' \xrightarrow{p} \mathrm{K} \xrightarrow{q} \mathrm{K}'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de complexes de* A. *Considérons le cône de* p *et le morphisme* $s : \mathrm{C}(p) \longrightarrow \mathrm{K}''$ *défini par* 0 *sur* K'^{i+1} *et par* q *sur* K^i. *Ce morphisme est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. Considérons le diagramme de suites exactes de A

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^i(\mathrm{K}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{H}^i(\mathrm{C}(p)) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "s"'] & \mathrm{H}^{i+1}(\mathrm{K}') \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathrm{H}^i(\mathrm{K}) \arrow[r, "q"] & \mathrm{H}^i(\mathrm{K}'') \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^{i+1}(\mathrm{K}') \end{tikzcd}$$

Le premier carré est commutatif par définition de s. Le second est anticommutatif par définition de v et du morphisme de liaison. Les deux lignes font partie des suites exactes longues de cohomologie et donc d'après le lemme des cinq, le morphisme s est un quasi-isomorphisme. $\square$

Dans le cas où la suite exacte considérée est celle qui est associée au cône d'un morphisme $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{L}$,

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \xrightarrow{u=u(f)} \mathrm{C}(f) \xrightarrow{v(f)} \mathrm{K}[1] \longrightarrow 0$$

le morphisme $s : \mathrm{C}(u)^i = \mathrm{L}[1]^i \oplus \mathrm{K}[1]^i \oplus \mathrm{L}^i \longrightarrow \mathrm{K}[1]^i$ est la projection sur le deuxième facteur. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{C}(u) \arrow[dd, "s"'] \arrow[dr, "v(u(f))"] & \\
\mathrm{C}(f) \arrow[ur, "u(u(f))"] \arrow[dr, "v(f)"'] & & \mathrm{L}[1] \\
 & \mathrm{K}[1] \arrow[ur, "-f[1]"'] &
\end{tikzcd}$$

le premier triangle est commutatif, le second l'est aussi dans $\mathrm{K}(\mathrm{A})$. En effet, l'opérateur défini en degré i par la projection canonique $\mathrm{C}(u)^i \longrightarrow \mathrm{L}^i$ est une homotopie entre $-f[1]s$ et $v(u)$.

Proposition 12. — *Dans le cas de la suite exacte associée au cône* $\mathrm{C}(f)$*, le morphisme* s *est une équivalence d'homotopie.*

Soit $t : \mathrm{K}[1] \longrightarrow \mathrm{C}(u)$ donné en degré i par la matrice

$$\begin{pmatrix} -f^{i+1} \\ \mathrm{id}_{\mathrm{K}^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est un morphisme de complexes qui est une section de s. Soit $h : \mathrm{C}(u)^i \longrightarrow \mathrm{C}(u)^{i-1}$ est donné par 0 sur $\mathrm{L}[1]^i \oplus \mathrm{K}[1]^i$ et l'inclusion canonique $\mathrm{L}^i \hookrightarrow \mathrm{C}(u)^{i-1} = \mathrm{L}^i \oplus \mathrm{K}^i \oplus \mathrm{L}^{i-1}$. Alors

$$1 - ts = dh + hd$$

ce qui montre que s est une équivalence d'homotopie.

Corollaire 13. — *Un triangle de* K(A)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[rr, "f"] & & \mathrm{L} \arrow[dl, "u"] \\ & \mathrm{M} \arrow[ul, "{[+1]}", "v"'] & \end{tikzcd}$$

est distingué si et seulement si le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L} \arrow[rr, "u"] & & \mathrm{M} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathrm{K}[1] \arrow[ul, "{[+1]}", "-f[1]"'] & \end{tikzcd}$$

est distingué.

En effet, supposons que $\mathrm{M} = \mathrm{C}(f)$. On applique à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \xrightarrow{u} \mathrm{C}(f) \longrightarrow \mathrm{K}[1] \longrightarrow 0$$

le résultat précédent, qui montre que le triangle associé au cône de u est isomorphe dans K(A) au deuxième triangle. Dans l'autre sens, il suffit d'itérer deux fois la propriété : on trouve que si le deuxième triangle est distingué, le premier triangle translaté est distingué.

Lemme 14. — *Tout diagramme de complexes*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{L} \arrow[d, "f"'] \\ \mathrm{K} \arrow[r, "g"] & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

de A*, où la flèche verticale f est un quasi-isomorphisme, se complète en un diagramme commutatif dans* K(A)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, "qis"', "f'"] & \mathrm{L} \arrow[d, "f"', "qis"] \\ \mathrm{K} \arrow[r, "g"] & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche verticale f' est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. On considère le cône $\mathrm{C} = \mathrm{C}g$ de g et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{L} \arrow[l, "uf"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{C} & \mathrm{N} \arrow[l, "u"']
\end{tikzcd}$$

et le cône $\mathrm{M} = \mathrm{C}(uf)$. On a alors un morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[rr, "{[+1]}"] \arrow[dd] & & \mathrm{L} \arrow[dl, "uf"] \arrow[dd, "f"] \\
& \mathrm{C} \arrow[ul] \arrow[dd] & \\
\mathrm{C}(u) \arrow[rr, "{[+1]}"] & & \mathrm{N} \arrow[dl, "u"] \\
& \mathrm{C} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes ; la proposition fournit une équivalence d'homotopie $\mathrm{C}(u) \longrightarrow \mathrm{K}[1]$ et le morphisme composé

$$\mathrm{C}(u) \longrightarrow \mathrm{K}[1] \xrightarrow{-g[1]} \mathrm{N}[1]$$

coïncide dans $\mathrm{K}(\mathrm{A})$ avec la projection naturelle . Alors la flèche composée

$$\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{C}(u) \longrightarrow \mathrm{K}[1]$$

est à décalage et signe près, le quasi-isomorphisme f' qui convient. $\square$

Lemme 15. — *Tout diagramme de complexes*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{L} \\ \mathrm{K} & \end{tikzcd}$$

de A*, où la flèche verticale* f *est un quasi-isomorphisme, se complète en un diagramme commutatif dans* K(A)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "qis"', "f"] & \mathrm{L} \arrow[d, "f'"', "qis"] \\ \mathrm{K} \arrow[r, "g'"] & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche verticale f' *est un quasi-isomorphisme.*

Ce lemme s'obtient de manière analogue en considérant le cône $\mathrm{C}(g)$ et le cône $\mathrm{C} = \mathrm{C}(v)$, où $v = v(g)$. Le complexe N construit est donné par le cône décalé $\mathrm{N} = \mathrm{C}(f[1]v)[-1]$ du morphisme $f[1]v : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{K}[1]$. Les morphismes g' et f' considérés sont à décalage près le morphisme canonique $\mathrm{K}[1] \longrightarrow \mathrm{C}(f[1]v)$ et le composé de l'inclusion canonique $\mathrm{L}[1] \longrightarrow \mathrm{C}(v)$ et du morphisme canonique $\mathrm{C}(v) \longrightarrow \mathrm{C}(f[1]v)$ figurant dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}(g) \arrow[rr, "v"] \arrow[dd] & & \mathrm{M}[1] \arrow[dl] \arrow[dd, "f[1]"] \\ & \mathrm{C}(v) \arrow[ul] \arrow[dd] & \\ \mathrm{C}(g) \arrow[rr, "{[+1]}"] & & \mathrm{K}[1] \arrow[dl] \\ & \mathrm{C}(f[1]v) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Ces deux derniers morphismes sont des quasi-isomorphismes.

Proposition 16. — *Soit* $K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow K[1]$ *un triangle distingué de* $K(A)$. *Alors le composé de deux flèches consécutives est nul.*

Il suffit d'après le corollaire 13 de montrer que le morphisme composé

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{u} C(f)$$

est homotope à 0. La famille $(\mathrm{id}_{K^i}) : K^i \longrightarrow K[1]^{i-1}$ est une homotopie entre $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ et le morphisme nul.

4.2. La catégorie dérivée $D(A)$

La catégorie dérivée $D(A)$ est obtenue à partir de $K(A)$ par localisation, en inversant les quasi-isomorphismes : elle a pour objets les complexes de A et pour morphismes $K \longrightarrow L$ les classes d'équivalence de diagrammes $K \longleftarrow M \longrightarrow L$ où la flèche gauche est un quasi-isomorphisme, à homotopie près. Plus précisément,

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(K, L) = \varinjlim_{M} \mathrm{Hom}_{K(A)}(M, L)$$

où $M \longrightarrow K$ est un quasi-isomorphisme. Le lemme 14 assure que pour K fixé la catégorie des quasi-isomorphismes $M \longrightarrow K$ est filtrante, de sorte que cette limite inductive a un sens, et on obtient ainsi sur $\mathrm{Hom}_{D(A)}(K, L)$ une structure de groupe abélien ; ce lemme permet aussi de composer les morphismes. On obtient ainsi une catégorie additive qui possède une opération de translation $K \mapsto K[1]$. Dans cette catégorie, on peut encore définir la notion de triangle distingué : c'est un triangle isomorphe au triangle défini par le cône d'un morphisme de complexes.

Exemple : Considérons une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{p} K \xrightarrow{q} K'' \longrightarrow 0$$

de complexes de A et le quasi-isomorphisme $s : \mathrm{C}(p) \longrightarrow \mathrm{K}''$ déjà considéré. Le couple $(s, v(p))$ définit alors dans D(A) un morphisme $d : \mathrm{K}'' \longrightarrow \mathrm{K}'[1]$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}(u) \arrow[dd, "s"'] \arrow[dr, "v"] & \\
& \mathrm{K}'[1] \\
\mathrm{K}'' \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. En particulier, le triplet (p, q, d) définit un triangle distingué de D(A) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}' \arrow[rr, "p"] & & \mathrm{K} \arrow[dl, "q"] \\
& \mathrm{K}'' \arrow[ul, "d", "{[+1]}"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 17. — *Soit* B *une catégorie abélienne. Un foncteur additif* $\mathrm{F} : \mathrm{D(A)} \longrightarrow \mathrm{B}$ *est un foncteur cohomologique s'il transforme un triangle distingué en suite exacte longue.*

Soit Ab la catégorie des groupes abéliens.

Proposition 18. —

(i) *Le foncteur* $\mathrm{D(A)} \longrightarrow \mathrm{A}$ *défini par* $\mathrm{K} \mapsto \mathrm{H(K)}$ *est un foncteur cohomologique.*

(ii) *Soit* M *un complexe de* A. *Les foncteurs* $\mathrm{D(A)} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ *définis par* $\mathrm{K} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{D(A)}}(\mathrm{M}, -)$ *et* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D(A)}}(-, \mathrm{M})$ *sont des foncteurs cohomologiques .*

Il suffit de montrer en vertu du lemme 13 que si $f : \mathrm{K} \xrightarrow{f} \mathrm{L}$ est un morphisme on a les suites exactes $\mathrm{H(K)} \longrightarrow \mathrm{H(L)} \longrightarrow \mathrm{H(C}(f))$ et

$$\mathrm{Hom(M, K)} \longrightarrow \mathrm{Hom(M, L)} \longrightarrow \mathrm{Hom(M, C}(f)).$$

C'est évident pour la première à cause de la suite exacte courte de complexes de A

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{C}(f) \longrightarrow \mathrm{K}[1] \longrightarrow 0.$$

On sait déjà que le morphisme composé $\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{C}(f)$ est nul. Donc on obtient une $0-$suite par application du foncteur $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, -)$. L'exactitude résulte de la remarque suivante : dans $\mathrm{K}(\mathrm{A})$ le triangle $\mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{M} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{M}[1]$ est distingué dans $\mathrm{K}(\mathrm{A})$ (parce que le cône du morphisme nul $0 \longrightarrow \mathrm{M}$ s'identifie à M) et donc dans $\mathrm{D}(\mathrm{A})$. Si $v : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{L}$ est un morphisme tel que $\mathrm{M} \xrightarrow{v} \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{C}(f)$ soit nul, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & 0 \arrow[d] \\ \mathrm{K} \arrow[r] & \mathrm{C}(f) \end{tikzcd}$$

se prolonge dans $\mathrm{D}(\mathrm{A})$ en un morphisme de triangles distingués. Donc on obtient un morphisme $\mathrm{M} \xrightarrow{u} \mathrm{K}$ tel que $fu = v$ dans $\mathrm{D}(\mathrm{A})$. Le raisonnement est le même pour le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{A})}(-, \mathrm{M})$.

Foncteurs dérivés droits

Soient A et B deux catégorie abéliennes, et un foncteur additif $\mathrm{F} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$. Le foncteur F se prolonge évidemment en un foncteur additif $\mathrm{K}(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathrm{B})$ noté encore F. Mais l'image d'un quasi-isomorphisme n'est pas en général un quasi-isomorphisme, de sorte qu'il ne s'étend pas en un foncteur additif $\mathrm{D}(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{B})$. On désigne encore par $\mathrm{F} : \mathrm{K}(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{B})$ le composé avec le foncteur de localisation $\mathrm{K}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{B})$.

Définition 19. — *On appelle foncteur dérivé droit de* F *un couple* (RF, m) *formé par un foncteur additif* $\mathrm{RF} : \mathrm{D}(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{B})$ *et un morphisme fonctoriel* $m : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{RF}$ *entre foncteurs*

de K(A) *dans* D(B)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K(A)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{F}"'] & \mathrm{D(A)} \arrow[d, "\mathrm{RF}"] \\ \mathrm{K(B)} \arrow[r] & \mathrm{D(B)} \end{tikzcd}$$

satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour tout foncteur additif

$$\mathrm{F}' : \mathrm{D(A)} \longrightarrow \mathrm{D(B)}$$

et tout morphisme fonctoriel $m' : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}'$ *il existe un unique morphisme fonctoriel* $f : \mathrm{RF} \longrightarrow \mathrm{F}'$ *tel que* $m' = fm$.

En général, on ne pourra pas définir le foncteur dérivé de F sur la catégorie dérivée toute entière, seulement sur certaines sous-catégories. Supposons que la catégorie abélienne A possède suffisamment d'injectifs. Désignons par $\mathrm{D}^+(\mathrm{A})$ (resp. $\mathrm{D}^-(\mathrm{A})$) la sous-catégorie pleine de D(A) dont les objets sont les complexes bornés inférieurement (resp. supérieurement). Considérons la sous-catégorie pleine $\mathrm{K}^+(\mathcal{J})$ de $\mathrm{K}^+(\mathrm{A})$ dont les objets sont les complexes bornés inférieurement dont les composantes sont des objets injectifs.

Proposition 20. — *Si la catégorie abélienne* A *a suffisamment d'injectifs, le foncteur canonique*

$$\mathrm{K}^+(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathrm{A})$$

est une équivalence de catégorie.

Démonstration. Ceci résulte des faits élémentaires suivants :

(i) Pour tout complexe $\mathrm{K} \in \mathrm{K}^+(\mathrm{A})$ il existe un complexe $\mathrm{I} \in \mathrm{K}^+(\mathcal{J})$ et un quasi-isomorphisme $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{I}$. Un tel quasi-isomorphisme s'appelle une résolution injective de K.

(ii) Soit $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{I}$ un morphisme de complexes de $\mathrm{K}^+(\mathrm{A})$ tels que K soit acyclique et I un complexe d'objets injectifs. Alors $f = 0$ dans $\mathrm{K}^+(\mathrm{A})$.

Il résulte de l'assertion (i) que le foncteur considéré est essentiellement surjectif. Montrons qu'il est pleinement fidèle. Soient I et J deux complexes bornés inférieurement d'objets injectifs, et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ un morphisme de $\mathrm{K}^+(\mathcal{I})$ dont l'image est nulle dans $\mathrm{D}^+(\mathrm{A})$. Alors il existe un complexe $\mathrm{M} \in \mathrm{K}(\mathrm{A})$ et un quasi-isomorphisme $\mathrm{M} \xrightarrow{s} \mathrm{I}$ tel que $fs = 0$ dans $\mathrm{K}(\mathrm{A})$. On peut évidemment en tronquant éventuellement M supposer que $\mathrm{M} \in \mathrm{K}^+(\mathrm{A})$. Considérons le morphisme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathrm{I} \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{J} \end{tikzcd}$$

Ce morphisme s'étend en un morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathrm{I} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{C}(s) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{J} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{J} \end{tikzcd}$$

et d'après l'assertion (ii), le morphisme $\mathrm{C}(s) \longrightarrow \mathrm{J}$ obtenu est nul dans $\mathrm{K}(\mathrm{A})$. Il en résulte que f est nul dans $\mathrm{K}^+(\mathrm{A})$.

Il reste à montrer que tout morphisme $\mathrm{I} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{J}$ de $\mathrm{D}^+(\mathrm{A})$ provient d'un morphisme $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ de $\mathrm{K}^+(\mathrm{A})$. Le morphisme $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ provient d'un couple de morphismes $\mathrm{I} \xleftarrow{s} \mathrm{M} \xrightarrow{g} \mathrm{J}$, où s est un quasi-isomorphisme et on peut supposer en tronquant éventuellement M que $\mathrm{M} \in \mathrm{K}^+(\mathrm{A})$. Considérons le cône C de s. D'après la proprité (ii), le morphisme composé $\mathrm{C}[-1] \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{g} \mathrm{J}$ est nul. Il en résulte que le diagramme commutatif dans $\mathrm{K}(\mathrm{A})$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}[-1] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M} \arrow[d, "j"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{J} \end{tikzcd}$$

s'étend un morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd}
C[-1] \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & I \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r, "\mathrm{id}"] & J
\end{tikzcd}$$

ce qui fournit le morphisme f attendu. $\square$

Remarquons que la démonstration prouve en fait que l'application

$$\mathrm{Hom}_{K^+(A)}(K, J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(A)}(K, J)$$

est un isomorphisme pour tout complexe $K \in K^+(A)$ et $J \in K^+(\mathcal{J})$.

Supposons choisi pour tout complexe $K \in K^+(A)$ un quasi-isomorphisme $K \xrightarrow{\epsilon} I$, avec $I \in K^+(\mathcal{J})$. Un tel choix fournit un foncteur P quasi-inverse pour le foncteur localisation $K^+(\mathcal{J}) \longrightarrow D^+(A)$ et on a un morphisme de foncteurs de la catégorie $K^+(A)$ dans elle-même

$$\mathrm{id}_{K^+(A)} \longrightarrow PQ$$

induit par ϵ, où $Q : K^+(A) \longrightarrow D^+(A)$ est le foncteur localisation.

Considérons un foncteur additif $F : A \longrightarrow B$. Il existe alors un foncteur dérivé droit de F

$$RF : D^+(A) \longrightarrow D^+(B)$$

donné par le foncteur composé $RF = QFP$ muni du morphisme fonctoriel $m : QF \longrightarrow QFPQ$; ce foncteur associe au complexe K le complexe F(I) où $K \longrightarrow I$ est la résolution donnée et $m : F(K) \longrightarrow F(I)$ est le morphisme induit par ϵ. La cohomologie $H^i(RF(K))$ du complexe RF(K) définit les foncteurs hyperdérivés ; ils sont notés $R^iF(K)$.

Définition 21. — *Un objet* $M \in A$ *est dit* F−*acyclique si* $R^qF(M) = 0$ *pour* $q > 0$.

Le foncteur dérivé RF possède les propriétés suivantes :

PROPOSITION 22. — (i) *Si les composantes du complexe* $\mathrm{K} \in \mathrm{K}^+(\mathrm{A})$ *sont* $\mathrm{F}-$*acycliques le morphisme canonique* $m : \mathrm{F}(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathrm{RF}(\mathrm{K})$ *est un isomorphisme.*

(ii) *Le foncteur* RF *transforme triangles distingués en triangles distingués.*

(iii) *Soient* $\mathrm{F} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ *et* $\mathrm{G} : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ *deux foncteurs additifs entre catégories abéliennes. On suppose que les catégories* A *et* B *on suffisamment d'injectifs et que* F *transforme un objet injectif en objet* $\mathrm{G}-$*acyclique. Alors on a un isomorphisme fonctoriel entre foncteurs* $\mathrm{D}^+(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathrm{C})$

$$\mathrm{R}(\mathrm{GF}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RG} \circ \mathrm{RF}$$

Démonstration. (i) Soit $\epsilon : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{I}$ une résolution injective de K. Le cône $\mathrm{C}(\epsilon)$ est un complexe exact fait d'objets $\mathrm{F}-$acycliques. Par suite, le complexe $\mathrm{F}(\mathrm{C}(\epsilon))$ est exact. Mais ceci implique que le morphisme $\mathrm{F}(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{I})$ est un quasi-isomorphisme, donc un isomorphisme dans D(B).

(ii) Soit $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{L}$ un morphisme de $\mathrm{K}^+(\mathrm{A})$. Si $\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{I}$ et $\mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{J}$ sont des résolutions injectives, il existe un morphisme de complexes $\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L} \arrow[d] \\ \mathrm{I} \arrow[r, "g"] & \mathrm{J} \end{tikzcd}$$

soit commutatif dans $\mathrm{K}^+(\mathrm{A})$. Ce morphisme de résolutions s'étend au cône $\mathrm{M} = \mathrm{C}(g)$ de g, et on a une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{C}(g) \longrightarrow \mathrm{I}[1] \longrightarrow 0$$

et le morphisme $\mathrm{C}(f) \longrightarrow \mathrm{C}(g)$ est une résolution injective donc d'après l'assertion (i) le morphisme canonique $\mathrm{F}(\mathrm{C}(g)) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{M})$ est un isomorphisme. Par application du foncteur F

on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{F(J)} \longrightarrow \mathrm{F(C}(g)) \longrightarrow \mathrm{F(I)[1]} \longrightarrow 0$$

et par suite par décalage un triangle distingué

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{RF(K)} \arrow[rr, "g"] & & \mathrm{RF(L)} \arrow[dl] \\
& \mathrm{RF(M)} \arrow[ul, "{[+1]}"] &
\end{tikzcd}$$

(iii) Soit $\mathrm{K} \xrightarrow{\epsilon} \mathrm{I}$ une résolution injective d'un complexe de $\mathrm{K}^+(\mathrm{A})$. Les composantes du complexe F(I) sont G−acycliques par hypothèse. D'après l'assertion (i), le morphisme canonique $\mathrm{G(F(I))} \longrightarrow \mathrm{RG(F(I))}$ est un isomorphisme. Ceci fournit un isomorphisme

$$\mathrm{R(GF)(K)} \longrightarrow \mathrm{RG(RF(K))}$$

dont on constate sans difficulté qu'il est fonctoriel. □

Lemme 23. — *Si* $\mathrm{R}^n\mathrm{F}$ *est nul pour* n *assez grand, le foncteur* RF *s'étend à la catégorie dérivée* D(A) *en un foncteur* $\mathrm{RF} : \mathrm{D(A)} \longrightarrow \mathrm{D(B)}$. *Ce foncteur induit un foncteur* $\mathrm{RF} : \mathrm{D}^-(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^-(\mathrm{B})$.

Démonstration. En effet, supposons que $\mathrm{R}^i\mathrm{F} = 0$ pour $i > \mathrm{N}$. Chaque objet a alors une résolution finie par un complexe d'objets acycliques de longueur $\leq \mathrm{N}$ qui s'obtient en tronquant supérieurement une résolution injective. Il en résulte qu'on peut alors trouver pour tout complexe K de A une résolution $\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{R}$ par un complexe d'objets acycliques : en effet, on peut classiquement trouver un complexe double $\mathrm{R}^{p,q}$ nul pour $q > \mathrm{N}$ et un morphisme d'augmentation $\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{R}^{\bullet,0}$ tel que les complexes $\mathrm{R}^{p,\cdot}$ et les complexes de cycles et de bords (par rapport à la première différentielle), $\mathrm{Z}^{p,\bullet}$ et $\mathrm{B}^{p,\bullet}$ soient des résolutions de K^p, des cycles $\mathrm{Z}^p(\mathrm{K})$ et $\mathrm{B}^p(\mathrm{K})$ respectivement. Le morphisme $\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{R} := \mathrm{T}(\mathrm{R}^{\bullet,\bullet})$ dans le complexe total associé à ce double complexe est

alors une résolution de K par un complexe d'objets acycliques. De plus étant données deux telles résolutions $K \longrightarrow R$ et $K \longrightarrow R'$, on peut construire un diagramme de quasi-isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dr] & \\
K \arrow[ur] \arrow[dr] & & R'' \\
 & R' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En effet, il suffit d'appliquer le lemme pour obtenir un tel diagramme de complexes de A, dans lequel R'' n'est peut-être pas composé d'objets acycliques ; si c'est le cas, on le remplace par une résolution $R'' \longrightarrow R'''$ par un complexe d'objets acycliques. Les morphismes $F(R) \longrightarrow F(R'') \longleftarrow F(R')$ sont alors des quasi-isomorphismes et donc définissent le même complexe à quasi-isomorphisme près, ce qui permet de définir RF(K). Si $K \in K^-(A)$, il est clair que l'on peut choisir une résolution R qui soit un complexe borné supérieurement. Ainsi, le foncteur dérivé RF induit un foncteur $RF : D^-(A) \longrightarrow D^-(B)$. □

5. Le complexe d'intersection

Soit X une variété algébrique complexe irréductible et réduite de dimension n, munie de la topologie usuelle.

5.1. Le complexe d'orientation

Rappelons d'abord le théorème de dualité de Poincaré sous sa forme la plus abstraite. Par chaîne singulière (à coefficient rationnels) on entend un élément du quotient de l'espace vectoriel des chaînes singulières classiques par le sous-espace vectoriel engendré par les chaînes $T^i c - c$, où T est la subdivision barycentrique, et i un entier ≥ 1.

Soit $\mathbf{D}^q_X$ le faisceau de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels associé au préfaisceau $U \mapsto S_{2n-q}(X, X-U)$ des chaînes singulières relatives à coefficient rationnels. En considérant l'opérateur bord $\mathbf{D}^q_X \longrightarrow \mathbf{D}^{q+1}_X$

on obtient un complexe appelé complexe d'orientation. La fibre de $\mathcal{H}^q(\mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}})$ au point x est l'homologie relative $\mathrm{H}_{2n-q}(\mathrm{X}, \mathrm{X}-\{x\})$. Ce complexe est donc quasi-isomorphe au faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}$ sur l'ouvert des point lisses. Quand il n'y a pas risque de confusion, il sera simplement noté $\mathbf{D}^\bullet$.

On a un morphisme canonique $\mathrm{S}_{2n-p}(\mathrm{X}) \longrightarrow \Gamma_c(\mathrm{X}, \mathbf{D}^p)$, évidemment compatible avec la différentielle, et par suite un morphisme

$$\mathrm{H}_{2n-p}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}^p_c(\mathrm{X}, \mathbf{D}^\bullet)$$

dans lequel le membre de droite désigne l'hypercohomologie à support compact à valeurs dans le complexe d'orientation.

THÉORÈME 24. — *Le morphisme canonique*

$$\mathrm{H}_{2n-p}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}^p_c(\mathrm{X}, \mathbf{D}^\bullet)$$

est un isomorphisme.

Cet énoncé est essentiellement dû à H. Cartan, qui travaille avec les chaînes singulières classiques, ce qui nécessite la notion de complexe homotopiquement fin. Le fait d'identifier une chaîne singulière avec ses subdivisions barycentriques permet de dire dans notre contexe que le morphisme $\mathrm{S}_{2n-p}(\mathrm{X}) \longrightarrow \Gamma_c(\mathrm{X}, \mathbf{D}^p)$ est un isomorphisme, et que, pour tout entier p, le faisceau $\mathbf{D}^p$ est un faisceau fin. L'énoncé en découle. Dans la pratique, puisque $\mathbf{D}^\bullet$ n'a pas de cohomologie en degré < 0, on pourra le remplacer par le complexe tronqué quotient $\tau_{\geq 0}\mathbf{D}^\bullet$, qu'on notera encore, par abus $\mathbf{D}^\bullet$, ou par une résolution injective de ce complexe fini : les conditions de finitude font qu'il existe toujours une résolution injective qui est un complexe fini.

5.2. La dualité de Verdier [26], [19]

Le théorème de dualité de Verdier ([26], théorème 1.2.2.) joue un grand rôle dans la caractérisation de la cohomologie d'intersection. Soit $\mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}$ le complexe d'orientation ; l'isomorphisme $\mathrm{H}_0(\mathrm{X}) \simeq \mathrm{H}^{2n}_c(\mathrm{X}, \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}})$ fournit une forme linéaire $\mathrm{H}^{2n}_c(\mathrm{X}, \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ appelé morphisme d'intégration. Pour tout complexe $\mathrm{K}^\bullet$ de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels, en composant l'accouplement de Yoneda avec le morphisme d'intégration on obtient pour $i + j = 2n$ un accouplement canonique

$$\mathrm{Ext}^i(\mathrm{K}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}) \otimes \mathrm{H}^j_c(\mathrm{K}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

THÉORÈME 25. — (Verdier) *Pour tout complexe* $\mathrm{K}^\bullet$ *de faisceaux de* $\mathbb{Q}-$*espaces vectoriels sur* X *l'accouplement canonique pour* $i+j=2n$

$$\mathrm{Ext}^i(\mathrm{K}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}) \otimes \mathrm{H}^j_c(\mathrm{K}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

induit un isomorphisme $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{K}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^j_c(\mathrm{K}^\bullet), \mathbb{Q})$.

Ceci peut s'interpréter aussi de la manière suivante. Au morphisme d'intégration I : $\mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}[2n] \longrightarrow \mathbb{Q}$ et à l'accouplement $\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(\mathrm{K}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}[2n]) \otimes \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{K}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{Q}$ est associé un morphisme

$$\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(\mathrm{K}^\bullet, \mathrm{D}^\bullet_{\mathrm{X}}[2n]) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{K}^\bullet)^*$$

Ce morphisme est un quasi-isomorphisme. Ceci donne une autre interprétation du complexe d'orientation : le complexe $\mathrm{T}^\bullet = \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}[2n]$ est isomorphe – dans la catégorie dérivée – au complexe défini par le faisceau $\mathrm{U} \mapsto \Gamma_c(\mathrm{U}, \mathrm{I}^\bullet)^*$ où $\mathrm{I}^\bullet$ est la résolution injective canonique du faisceau constant $\underline{\mathbb{Q}}$.

DÉFINITION 26. — *Le complexe* $\mathrm{T}^\bullet_{\mathrm{X}} = \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}[2n]$, *décalé de* $\mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}$ *vers la gauche s'appelle complexe dualisant.*

Exemple

Soit $j : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ une immersion fermée de codimension pure complexe r. En appliquant le théorème de dualité au complexe $j_*(\mathrm{I}^\bullet_{\mathrm{Y}})$ sur les ouverts de X, où $\mathrm{I}^\bullet_{\mathrm{Y}}$ est la résolution injective canonique de $\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}}$, on obtient une description du faisceau $j_*(\mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{Y}})$: il est donné par

$$\begin{aligned} j_*(\mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{Y}}) &= \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(j_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}}), \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}})[2r] \\ &= \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}(j_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}}))[2r] \end{aligned}$$

Cet énoncé est en fait un cas particulier du théorème de dualité relative. Si $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ est un morphisme de variétés algébriques, on désigne par $\mathrm{R}f_!$ le foncteur image directe à support propre, et par $f^!$ le foncteur adjoint : il est défini sur la catégorie dérivée dont les objets sont les complexes de faisceaux d'espaces vectoriels à cohomologie bornée par

$$\Gamma(\mathrm{U}, f^!(\mathrm{K}^\bullet)) = \mathrm{Hom}^\cdot(f_!(\mathrm{I}^\bullet_{\mathrm{U}}), \mathrm{J}^\bullet))$$

où $I^\bullet$ est la résolution injective canonique de $\underline{\mathbb{Q}}_Y$ et $J^\bullet$ la résolution injective canonique de $K^\bullet$, et U un ouvert de Y. Quand $f : Y \longrightarrow X$ est une immersion fermée, on a plus simplement

$$\begin{aligned} f^!(K^\bullet) &= f^*(R\underline{Hom}(f_*(\underline{\mathbb{Q}}_Y), K^\bullet)) \\ &= f^*(R\underline{\Gamma}_Y(K^\bullet)) \end{aligned}$$

où $\underline{\Gamma}_Y$ désigne le foncteur des sections locales à support dans Y. Ainsi, la cohomologie $\mathcal{H}^q(f^!(K^\bullet))$ s'identifie à la cohomologie locale $\mathcal{H}^q_Y(K^\bullet)$ de $K^\bullet$ à support dans Y.

THÉORÈME 27. — (Verdier [26], [19]) *Si* $K^\bullet$ *et* $L^\bullet$ *sont des complexes d'espaces vectoriels sur* Y *et* X *respectivement on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}(Rf_!(K^\bullet), L^\bullet) = \mathrm{Hom}(K^\bullet, f^!(L^\bullet))$$

On suppose maintenant que X munie d'une stratification X_ν : ceci signifie que X est réunion disjointe finie de sous-variétés localement fermées dans la topologie de Zariski X_ν, lisses et connexes appelées strates, et que la fermeture $\overline{X}_\nu$ de la strate X_ν est une réunion de strates.

DÉFINITION 28. — *Soit* $K^\bullet$ *un complexe de faisceaux de* $\mathbb{Q}-$*espaces vectoriels sur* X. *On dit que* $K^\bullet$ *est constructible relativement à une stratification donnée* X_ν *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

— *le complexe* $K^\bullet$ *est cohomologiquement borné ;*

— *en tout point* $x \in X$, *la fibre* $\mathcal{H}^q(K^\bullet)_x$ *est un espace vectoriel de dimension finie ;*

— *les faisceaux de cohomologie* $\mathcal{H}^q(K^\bullet|_{X_\nu})$ *sont localement constant sur* X_ν.

On dit que $K^\bullet$ *est constructible s'il existe une stratification de* X *telle que* $K^\bullet$ *soit constructible relativement à cette stratification.*

Exemples

Le complexe d'orientation $\mathbf{D}^\bullet_X$ est constructible. Si $K^\bullet$ est un complexe constructible, le dual de Verdier (1) $D_X(K^\bullet) = R\underline{Hom}(K^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)$ est un complexe constructible, et le morphisme

$$K^\bullet \longrightarrow D_X D_X K^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme (*cf.* Verdier [26]).

(1) Les conventions habituelles seraient de poser plutôt $D_X(K^\bullet) = R\underline{Hom}(K^\bullet, \mathbf{T}^\bullet)$ ce qui éviterait la décalage de degré dans le théorème de dualité qui suit ; nous n'adoptons pas cette convention parce que cela complique certains énoncés au §4.5.

THÉORÈME 29. — *(Verdier [26]) Soit* $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ *un morphisme de variétés algébriques irréductibles et réduites, et* $d = \dim \mathrm{Y} - \dim \mathrm{X}$. *Alors*

(i) *Pour tout complexe constructible* $\mathrm{K}^\bullet$ *sur* X *les images directes* $\mathrm{R}f_*(\mathrm{K}^\bullet)$ *et* $\mathrm{R}f_!(\mathrm{K}^\bullet)$ *sont constructibles, et on a dans la catégorie dérivée constructible*

$$\mathrm{R}f_*(\mathrm{D}_\mathrm{Y}(\mathrm{K}^\bullet)) = \mathrm{D}_\mathrm{X}(\mathrm{R}f_!(\mathrm{K}^\bullet))[-2d] \tag{4.1}$$

(ii) *Pour tout complexe constructible* $\mathrm{L}^\bullet$ *sur* X, *les complexe* $f^*(\mathrm{L}^\bullet)$ *et* $f^!(\mathrm{L}^\bullet)$ *sont constructibles, et on a dans la catégorie dérivée constructible sur* Y

$$\mathrm{D}_\mathrm{Y}(f^!(\mathrm{L}^\bullet)) = f^*(\mathrm{D}_\mathrm{X}(\mathrm{L}^\bullet))[-2d] \tag{4.2}$$

La catégorie dérivée constructible considérée ci-dessus est la catégorie sont les objets sont les complexes constructibles et dont les flèches sont obtenues à partir des classes d'homotopie de morphismes en rendant inversibles les quasi-isomorphismes. On passe de (i) à (ii) par adjonction. En appliquant le second isomorphisme à $\mathrm{L}^\bullet = \mathbf{D}^\bullet_\mathrm{X}$ on obtient :

COROLLAIRE 30. — *On a* $f^!(\mathbf{D}^\bullet_\mathrm{X}) = \mathbf{D}^\bullet_\mathrm{Y}[2d]$.

En particulier, si on prend pour f le morphisme constant $f : \mathrm{X} \longrightarrow \bullet$, on obtient $f^!(\underline{\mathbb{Q}}) = \mathbf{D}^\bullet_\mathrm{X}[2n] = \mathrm{T}^\bullet_\mathrm{X}$. Dans le cas où $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est propre, on a bien sûr $\mathrm{R}f_* = \mathrm{R}f_!$, mais on sera attentif à ne pas confondre f^* et $f^!$, sauf si f est le morphisme d'inclusion d'un ouvert dans Y.

Notons enfin que si $j : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est l'inclusion d'un fermé Y dans X et $i : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ l'ouvert complémentaire, on a un triangle distingué

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}i_!i^!(\mathrm{K}^\bullet) \arrow[rr] & & \mathrm{K}^\bullet \arrow[dl] \\
& j_*j^*(\mathrm{K}^\bullet) \arrow[ul, "{[+1]}"] &
\end{tikzcd}$$

ce qui signifie que ce triangle est isomorphe au triangle obtenu en considérant le triangle ayant même flèche horizontale, et dont le troisième sommet est le mapping cône de cette flèche. Ce

triangle distingué fournit la suite exacte longue de cohomologie faisant intervenir la restriction au fermé Y. Par dualité de Verdier on obtient encore un triangle distingué

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}i_*i^*(\mathrm{K}^\bullet) \arrow[rr, leftarrow] \arrow[dr, "{[+1]}"'] & & \mathrm{K}^\bullet \\
& j_*j^!(\mathrm{K}^\bullet) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

dont la suite exacte longue de cohomologie associée est la suite exacte de cohomologie locale à support dans Y. Ce triangle distingué nous sera très utile.

5.3. La construction de Deligne [12], [2]

Définition 31. — *On appelle perversité de niveau n une suite croissante $\overline{p} : [1,n] \longrightarrow [1,2n-1]$ telle que $\overline{p}(1) = 1$, et telle que $\overline{p}(i+1) - \overline{p}(i) \leq 2$.*

On sera surtout concerné par la perversité moitié, définie par $\overline{p}(i) = i$. Pourtant, la perversité minimale définie par $\overline{p}(i) = 1$ qui sera notée aussi $\overline{1}$ et la perversité maximale $\overline{t}$ définie par $\overline{t}(i) = 2i-1$ sont aussi importantes ; pour les propriétés de fonctorialité, on aura besoin de changer parfois de perversité.

Soit X une variété algébrique, munie d'une stratification X_ν. Pour chaque strate S on pose

$$p(\mathrm{S}) = \overline{p}(\text{codim S}) \text{ si codim (S)} \geq 1$$

et $p(\mathrm{S}) = 0$ si S est la strate dense. On désigne par X^k le fermé réunion des strates telles que $p(\mathrm{S}) \geq k$ et par U_k l'ouvert réunion des strates telles que $p(\mathrm{S}) \leq k$. Etant donné un complexe de faisceaux de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels $\mathrm{K}^\bullet$, on désigne par $\mathrm{K}^\bullet_k$ sa restriction à U_k. On se donne un système local R de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels sur la strate dense U_0.

Théorème 32. — *Soient* X *une variété algébrique complexe irréductible, de dimension n, munie d'une stratification* X_ν, R *un système local de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels sur l'ouvert* U_0, *et $\overline{p}$ une*

perversité de niveau n. Il existe un complexe fini constructible de faisceaux de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels $\mathbf{I}^\bullet = \mathbf{I}^\bullet(\mathrm{R})$ et un quasi-isomorphisme

$$\iota : \mathrm{R} \longrightarrow \mathbf{I}_0^\bullet$$

satisfaisant aux conditions suivantes

(a) (Borne inférieure) *: $\mathcal{H}^i(\mathbf{I}^\bullet) = 0$ si $i < 0$.*

(b) (Condition d'annulation) *: Si $j \geq 1$ et $j \geq k$, on a $\mathcal{H}^j(\mathbf{I}_k^\bullet) = 0$*

(c) (Attachement) *: soit pour $k \geq 1$, $i : \mathrm{U}_k \hookrightarrow \mathrm{U}_{k+1}$ l'inclusion canonique. Le morphisme canonique*

$$\mathbf{I}_{k+1}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}i_*(\mathbf{I}_k^\bullet)$$

induit par l'inclusion ouverte i est un quasi-isomorphisme en degré $\leq k$.

Dans la catégorie dérivée constructible $\mathcal{D}_\mathrm{X}$, le couple $(\iota, \mathbf{I}^\bullet)$ est caractérisé à isomorphisme (unique) près par ces conditions.

La catégorie dérivée constructible $\mathcal{D}_\mathrm{X}$ considérée dans cet énoncé est celle dont les objets des complexes finis constructibles, et dans laquelle les flèches sont obtenues à partir des classes d'homotopie de morphismes en rendant inversibles les quasi-isomorphismes.

Définition 33. — *Le complexe $\mathbf{I}^\bullet(\mathrm{R})$, bien défini à isomorphisme près dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}_\mathrm{X}$, s'appelle complexe d'intersection à coefficients dans* R, *relatif à la perversité $\overline{p}$. L'hypercohomologie de ce complexe*

$$\mathrm{IH}^q(\mathrm{X}, \mathrm{R}) = \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathbf{I}^\bullet(\mathrm{R}))$$

s'appelle la cohomologie d'intersection relative à la perversité $\overline{p}$ et à valeurs dans le système local R.

Quand le système local R est trivial, le complexe d'intersection sera simplement noté $\mathbf{I}^\bullet$. Si on doit préciser la perversité on le notera $\mathbf{I}_{\overline{p}}^\bullet(\mathrm{R})$, et la cohomologie d'intersection sera notée $\mathrm{IH}_{\overline{p}}^*(\mathrm{X}, \mathrm{R})$. Le complexe d'intersection $\mathbf{I}^\bullet(\mathrm{R})$ se construit par récurrence en utilisant les propriétés (b) et (c) : elles signifient que $\mathbf{I}_{k+1}^\bullet$ est quasi-isomorphe au complexe tronqué $\tau_{\leq k}\mathrm{R}i_*(\mathbf{I}_k^\bullet)$. L'unicité provient de la propriété universelle suivante.

Propriété universelle.

Proposition 34. — *Soit* $\mathbf{J}^\bullet$ *un complexe constructible de* $\mathbb{Q}-$*espaces vectoriels, et* j : $\mathrm{R} \longrightarrow \mathbf{J}_0$ *un quasi-isomorphisme.*

(i) *Si* $\mathbf{J}^\bullet$ *satisfait à la condition d'annulation de l'énoncé , il existe un morphisme naturel et un seul (dans la catégorie dérivée)*

$$\varphi : \mathbf{J}^\bullet \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet$$

compatible avec les quasi-isomorphismes j *et* ι.

(ii) *Si* $\mathbf{J}^\bullet$ *satisfait à la condition d'attachement de l'énoncé ci-dessus, il existe un morphisme naturel et un seul (dans la catégorie dérivée)*

$$\rho : \mathbf{I}^\bullet \longrightarrow \mathbf{J}^\bullet$$

compatible avec les quasi-isomorphismes ι *et* j.

La démontration de cette proposition est une conséquence du principe du relèvement qui sera très utile dans la suite.

Lemme 35. — (Lemme de relèvement) *Soit* $\mathcal{D}$ *la catégorie dérivée constructible. Soient* $\mathrm{A}^\bullet$ *un complexe de* $\mathcal{D}$ *tel que* $\mathrm{H}^q(\mathrm{A}^\bullet) = 0$ *en degré* $q \geq k+1$ *et* $f : \mathrm{B}^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet$ *un morphisme de complexes à cohomologie positive qui induit en cohomologie un morphisme bijectif en degré* $\leq k-1$ *et injectif en degré* k. *Alors*

(i) *Le morphisme induit par* f

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{B}^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{C}^\bullet)$$

est injectif.

(ii) *Ce morphisme a pour image le sous-espace vectoriel des morphismes (dans la catégorie dérivée)* $g : \mathrm{A}^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet$ *tels que le morphisme induit en cohomologie se factorise suivant le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^k(\mathrm{A}^\bullet) \arrow[dl] \arrow[d, "g"] \\
\mathrm{H}^k(\mathrm{B}^\bullet) \arrow[r, "f"] & \mathrm{H}^k(\mathrm{C}^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On considère le mapping cône $\mathrm{M}^\bullet$ de f. On a donc un triangle distingué

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}^\bullet \arrow[rr] & & \mathrm{C}^\bullet \arrow[dl] \\ & \mathrm{M}^\bullet \arrow[ul, "{[+1]}"] & \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, on a $\mathrm{H}^q(\mathrm{M}^\bullet) = 0$ pour $q \leq k-1$. Il en résulte que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{M}^\bullet[-1]) = 0$. Le triangle distingué

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R\,Hom}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{B}^\bullet) \arrow[rr] & & \mathrm{R\,Hom}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{C}^\bullet) \arrow[dl] \\ & \mathrm{R\,Hom}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{M}^\bullet) \arrow[ul, "{[+1]}"] & \end{tikzcd}$$

montre que l'on a une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{B}^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{C}^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{M}^\bullet)$$

ce qui prouve (i). Mais l'application naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{M}^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^k(\mathrm{A}^\bullet), \mathrm{H}^k(\mathrm{M}^\bullet))$ est évidemment un isomorphisme. Un morphisme $g : \mathrm{A}^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet$ qui induit en cohomologie un morphisme qui se factorise suivant la propriété (ii) induit un morphisme nul $\mathrm{A}^\bullet \longrightarrow \mathrm{M}^\bullet$. $\square$

Démonstration de la proposition :

(i) On construit φ_k sur l'ouvert U_k par récurrence sur k. Sur l'ouvert U_0, par définition des morphismes dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}_{\mathrm{U}_0}$, on peut considérer $\varphi_0 = \iota \circ j^{-1}$. Supposons maintenant construit φ_k sur l'ouvert U_k. et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{J}^\bullet_{k+1} \arrow[r] & \mathrm{R}i_*(\mathbf{J}^\bullet_k) \arrow[d, "\varphi_k"] \\ \mathbf{I}^\bullet_{k+1} \arrow[r] & \mathrm{R}i_*(\mathbf{I}^\bullet_k) \end{tikzcd}$$

Le complexe $\mathbf{J}^\bullet_{k+1}$ est acyclique en degré $\geq k+1$ d'après la condition d'annulation. La seconde flèche horizontale est un quasi-isomorphisme en degré $\leq k$ d'après la condition d'attachement.

Donc d'après le lemme de relèvement, dans la catégorie dérivée on peut construire le morphisme φ_{k+1} et ceci de manière unique.

(ii) Pour la seconde assertion, on procède de la même façon : on construit ρ_0 sur l'ouvert U_0 en posant $\rho_0 = j \circ \iota^{-1}$. Supposons construit ρ_k, et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{I}^\bullet_{k+1} \arrow[r] & \mathrm{R}i_*(\mathbf{I}^\bullet_k) \arrow[d, "\rho_k"] \\ \mathbf{J}_{k+1} \arrow[r] & \mathrm{R}i_*(\mathbf{J}_k) \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, la seconde ligne horizontale est un quasi-isomorphisme en degré $\leq k$. Donc ce diagramme fournit ρ_{k+1} en appliquant le lemme de relèvement. $\square$

Applications

1. Supposons que $\overline{r}$ et $\overline{s}$ soient deux perversités de niveau n telles que $\overline{r} \leq \overline{s}$, et désignons par $\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}}$ et $\mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}$ les complexes d'intersection associés. Il résulte de la propriété universelle que l'on a un morphisme naturel dans la catégorie dérivée

$$\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}.$$

2. Dans le cas particulier où le système local R est trivial, il résulte encore de la propriété universelle que l'on a aussi des morphismes naturels $\underline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\overline{p}} \longrightarrow \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}$ puisque $\underline{\mathbb{Q}}$ satisfait à la condition (b) pour la perversité minimale, et que le complexe d'orientation $\mathbf{D}^\bullet$ à la condition (c) pour la perversité maximale. En cohomologie à support compact, on a donc des morphismes canoniques

$$\mathrm{H}^q_c(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{IH}^q_{\overline{p},c}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}^q_c(\mathrm{X}, \mathbf{D}^\bullet) = \mathrm{H}_{2n-q}(\mathrm{X}).$$

On verra au paragraphe suivant que quand X est normale les morphismes construits $\underline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\overline{1}}$ et $\mathbf{I}^\bullet_{\overline{t}} \longrightarrow \mathbf{D}^\bullet_{\mathrm{X}}$ sont des isomorphismes.

Remarques

1. Considérons l'espace vectoriel $\mathrm{C}^q_{\overline{p}}(\mathrm{U})$ des chaînes localement finies, sous-analytiques de codimension q

$$z = \sum_c n_c c$$

où c est un simplexe sous-analytique de codimension q, satisfaisant à la condition de transversalité suivante : pour toute strate S de codimension k,

$$\operatorname{codim} |z| \cap \mathrm{S} \geq q + 2k - \overline{p}(k) + 1 \text{ et } \operatorname{codim} |\partial z| \cap \mathrm{S} \geq q + 2k - \overline{p}(k) + 2$$

où $|z|$ est le support de la chaîne, c'est-à-dire la réunion des images des simplexes c telles que $n_c \neq 0$. On obtient ainsi un complexe de faisceaux $\mathrm{C}^\bullet_{\overline{p}}$; sur l'ouvert U_0, ce complexe se s'identifie au complexe des chaînes sous-analytiques standard, et on a donc un isomorphisme

$$j : \underline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{C}^\bullet_{\overline{p}}$$

Il est possible de vérifier que le complexe $\mathrm{C}^\bullet_{\overline{p}}$ satisfait au conditions du théorème de Deligne. Donc on a un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{C}^\bullet_{\overline{p}} \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\overline{p}}$$

2. On peut étendre cette interprétation au cas d'un système local R défini sur l'ouvert U_0. La seule difficulté est de définir la notion de chaîne sous-analytique permise à coefficients dans R.

5.4. Indépendance de la stratification

Le point essentiel dans le travail de Goresky et MacPherson est que le complexe $\mathbf{I}^\bullet(\mathrm{R})$ est un invariant qui ne dépend pas de la stratification. Ceci nécessite l'introduction du dual de Verdier d'un complexe de faisceaux d'espaces vectoriels $\mathrm{K}^\bullet$: comme on l'a déjà vu, ce dual est défini par $\mathrm{D}_\mathrm{X}(\mathrm{K}^\bullet) = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{K}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet_\mathrm{X})$ où $\mathbf{D}^\bullet_\mathrm{X}$ est le complexe d'orientation introduit ci-dessus ; ses faisceaux d'hypercohomologie en degré q sont notés $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{K}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)$. Rappelons que si le complexe $\mathrm{K}^\bullet$ est constructible, il en est de même du dual de Verdier, et le morphisme fonctoriel $\mathrm{K}^\bullet \mapsto \mathrm{D}_\mathrm{X}\mathrm{D}_\mathrm{X}\mathrm{K}^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

Considérons maintenant une perversité $\overline{p}$ de niveau n ; la perversité complémentaire $\overline{p}^*$ est définie par $\overline{p}(i) + \overline{p}^*(i) = 2i$.

THÉORÈME 36. — *Soient* X *une variété algébrique complexe,* $\Sigma \subset \mathrm{X}$ *un fermé algébrique contenant l'ensemble des points singuliers de* X*, et* R *un système local sur l'ouvert* $\mathrm{U} = \mathrm{X} - \Sigma$.

Il existe un complexe fini constructible de faisceaux de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels $\mathbf{J}^\bullet$ et un quasi-isomorphisme

$$j : \mathrm{R} \longrightarrow \mathbf{J}^\bullet|_{\mathrm{U}}$$

satisfaisant aux conditions suivantes

(a) (Borne inférieure) *: $\mathcal{H}^i(\mathbf{J}^\bullet) = 0$ si $i < 0$.*

(b') (Condition de support) *Si $\mathcal{H}^q(\mathbf{J}^\bullet)$ n'est pas nul, il existe un entier $1 \leq k \leq n$ tel que $p(k) > q$ et on a si $q > 0$*

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^q(\mathbf{J}^\bullet) \geq \min\{m, \overline{p}(m) > q\}.$$

(c') (Condition de cosupport) *Si le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathbf{J}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)$ n'est pas nul, il existe un entier k tel que $\overline{p}^*(k) \geq q$, et on a si $q > 0$*

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathbf{J}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet) \geq \min\{m, \overline{p}^*(m) > q\}.$$

Dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}_{\mathrm{X}}$, le couple $(\iota, \mathbf{J}^\bullet)$ est caractérisé à isomorphisme unique près par ces conditions.

Existence :

On peut trouver une stratification de X, pour laquelle l'ouvert U_0 soit exactement l'ouvert U ; vérifions que le complexe d'intersection $\mathbf{I}^\bullet = \mathbf{I}^\bullet_{\overline{p}}(\mathrm{R})$ obtenu par la construction de Deligne satisfait aux conditions ci-dessus. La condition b) signifie que le support de $\mathcal{H}^q(\mathbf{I}^\bullet)$ est contenu dans le fermé X^{q+1}, ce qui implique la condition b'). Elle signifie aussi que pour toute strate S de codimension ℓ, on a

$$\mathcal{H}^q(j^*(\mathbf{I}^\bullet)) = 0 \text{ pour } q \geq \overline{p}(\ell) \tag{4.3}$$

où $j : \mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{X}$ désigne l'inclusion canonique. Considérons le fermé $\mathrm{Y}^k = \mathrm{X}^k - \mathrm{X}^{k+1}$ de l'ouvert U_k, et désignons par $j : \mathrm{Y}^k \longrightarrow \mathrm{U}_k$ l'inclusion canonique. Ce fermé est réunion de strates dont la codimension ℓ satisfait à $\overline{p}(\ell) = k$. La suite exacte associée en cohomologie au triangle distingué

$$\begin{tikzcd}
j_*(j^!(\mathbf{I}^\bullet)) \arrow[rr] & & \mathbf{I}^\bullet_k \arrow[dl] \\
& \mathrm{R}i_*(\mathbf{I}^\bullet_{k-1}) \arrow[ul, "{[+1]}"] &
\end{tikzcd}$$

et les conditions b) et c) entraînent que $\mathcal{H}^q(j^!(\mathbf{I}^\bullet)) = 0$ si $q \leq k$. Considérons une strate S de X de codimension $\ell \geq 1$; désignons par $\overline{\mathrm{S}}$ la fermeture de S dans U_k et par $j_{\overline{\mathrm{S}}} : \overline{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{X}$ le morphisme d'inclusion. On a encore évidemment $\mathcal{H}^q(j_{\overline{\mathrm{S}}}^!(\mathbf{I}^\bullet)) = 0$ pour $q \leq k = \overline{p}(\ell)$. Le morphisme $j : \mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{X}$ se factorise à travers $\overline{\mathrm{S}}$ par un morphisme ouvert $u : \mathrm{S} \longrightarrow \overline{\mathrm{S}}$. L'exactitude du foncteur $u^! = u^*$ montre que l'on a alors

$$\mathcal{H}^q(j^!(\mathbf{I}^\bullet)) = 0 \text{ pour } q \leq \overline{p}(\ell). \tag{4.4}$$

Du fait que ce faisceau est localement constant sur S, on voit que ceci implique que $\mathcal{H}^q(\mathrm{D}_\mathrm{S}(j^!\mathbf{I}^\bullet)) = 0$ si $\overline{p}(\ell) = k$, et $q \geq -k$. Compte-tenu de la dualité de Verdier,

$$\mathrm{D}_\mathrm{S}(j^!\mathbf{I}^\bullet) = j^*(\mathrm{D}_\mathrm{X}\mathbf{I}^\bullet)[2\ell]$$

ceci signifie que $\mathcal{H}^q j^*(\mathrm{D}_\mathrm{X}(\mathbf{I}^\bullet)) = 0$ pour $q \geq 2\ell - \overline{p}(\ell)$: c'est la condition (b) relative à la perversité complémentaire p^* pour le complexe $\mathrm{D}_\mathrm{X}(\mathbf{I}^\bullet)$; ceci implique évidemment la condition (c').

Unicité :

Pour obtenir l'unicité, on montre que si la stratification est bien choisie, le complexe $\mathbf{J}^\bullet$ satisfait aux conditions (b) et (c) du théorème . D'après l'unicité dans le théorème de Deligne, il existe un isomorphisme (et un seul)

$$\mathbf{I}^\bullet \simeq \mathbf{J}^\bullet$$

compatible avec les quasi-isomorphismes ι et j. Il suffit alors de constater que si $\mathbf{J}^\bullet$ et $\mathbf{K}^\bullet$ sont deux tels complexes, on peut choisir la stratification bien adaptée à ces deux complexes, ce qui est possible parce que ce choix est suffisamment souple pour autoriser des raffinements de la stratification.

Corollaire 37. — *Le dual de Verdier* $\mathrm{D}_\mathrm{X}(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{p}}(\mathrm{R}))$ *est isomorphe dans la catégorie dérivée constructible au complexe d'intersection* $\mathbf{I}^\bullet_{\overline{p}^*}(\mathrm{R}^*)$, *où* R^* *désigne le système local dual de* R.

Proposition 38. — *Soit* $\overline{t}$ *la perversité maximale. Si* X *est normale, les morphismes canoniques* $\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\overline{1}}$ *et* $\mathbf{I}^\bullet_{\overline{t}} \longrightarrow \mathbf{D}^\bullet$ *sont des isomorphismes.*

Démonstration. Il est évident que le complexe $\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{X}$ satisfait à la condition (b') pour la perversité minimale $\overline{1}$. Il s'agit de vérifier que le dual $\mathbf{D}^\bullet_\mathrm{X}$ satisfait à la condition (b') pour la perversité

maximale. Soit X_ν une stratification de X. Il est clair que pour tout $x \in X$ on a $H_0(X, X - \{x\}) = 0$ ce qui entraîne que la cohomologie $\mathcal{H}^q(\mathbf{D}_X)$ est nulle pour $q = 2n$. Pour voir que ce faisceau est encore nul pour $q = 2n-1$ on remarque que le support de ce faisceau est contenu dans la réunion des strates de codimension n. En un tel point, il s'agit de vérifier que si U est un voisinage contractile assez petit de x, on a $H_1(U, U - \{x\}) = 0$, c'est-à-dire que le morphisme $H_0(U - \{x\}) \longrightarrow H_0(U)$ est un isomorphisme. Ceci résulte du théorème bien connu de Zariski qui affirme qu'une variété algébrique normale est topologiquement unibranche au point x. On démontre en utilisant le même argument que si la codimension de la strate passant par x est k on a $H_{2n-q}(X, X - \{x\}) = 0$ si $2k - 1 \leq q$ (*cf.* Mumford [22]). Autrement dit si S est une strate de codimension k, on a $\mathcal{H}^q(j^*(\mathbf{D}_X^\bullet)) = 0$ si $q \geq 2k - 1$. C'est la condition (b) pour la perversité maximale. On a vu que ceci entraîne la condition (c'). Il en résulte que $\underline{\mathbb{Q}}_X \longrightarrow \mathbf{I}_0^\bullet$ est un isomorphisme. Par dualité, on obtient un morphisme $\mathbf{I}_{\bar{t}}^\bullet \longrightarrow D$ qui est aussi un isomorphisme. On peut vérifier que ce morphisme est exactement le morphisme obtenu à partir de la construction de Deligne.

Exemples :

1. Si X est une variété lisse, les morphismes canoniques

$$\underline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbf{I}_{\bar{p}}^\bullet \longrightarrow \mathbf{D}^\bullet$$

sont des isomorphismes.

2. Le même résultat est vrai si X est seulement homologiquement rationnellement lisse ce qui signifie que pour tout point $x \in X$, l'homologie relative $H_q(X, X - \{x\})$ est nulle, sauf en dimension $q = 2n$ où l'on obtient un espace vectoriel de dimension 1. Ceci s'applique en particulier quand X est une variété quotient d'une variété lisse Y par un groupe fini. Alors le complexe d'intersection est quasi-isomorphe au faisceau d'orientation.

Remarque

La construction du complexe d'intersection peut en fait se faire sur tout polyèdre convenablement stratifié ; un énoncé analogue au théorème ci-dessus et le théorème de triangulation d'Hironaka [16] montrent alors que $\mathbf{I}^\bullet$ est un invariant qui ne dépend que de la topologie de X.

5.5. Cup-produit

Considèrons deux perversités $\overline{r}$ et $\overline{s}$ de niveau n telles que $\overline{r}+\overline{s} \leq \overline{t}+1$, et le complexe produit tensoriel ([2]) $\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \otimes \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}$. Sur l'ouvert de lissité de X, on dispose d'un quasi-isomorphisme $\underline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \otimes \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}$. D'après la formule de Künneth, on a

$$\mathcal{H}^k(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \otimes \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}) = \oplus_{p+q=k} \mathcal{H}^p(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}}) \otimes \mathcal{H}^q(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}})$$

On voit donc que le support de $\mathcal{H}^k(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \otimes \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}})$ est contenu dans la réunion

$$\bigcup_{p+q=k} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^p(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}}) \cap \operatorname{Supp} \mathcal{H}^q(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}})$$

Il en résulte que

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^k(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \otimes \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}) \geq \min_{p+q=k} \operatorname{codim} \operatorname{Supp} (\mathcal{H}^p(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}})) \cap \operatorname{Supp} \mathcal{H}^q(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}))$$

Soit m la codimension du premier membre. Cette inégalité et la propriété (b') impliquent qu'il existe des entiers p et q tels que $p+q=k$ et tels que $\overline{r}(m) > p$ et $\overline{s}(m) > q$. On a alors $\overline{r}(m)+\overline{s}(m) > k+1$. Ainsi,

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^k(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \otimes \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}) \geq \min\{m, \overline{r}(m)+\overline{s}(m) > k\}$$

Ceci signifie que le complexe $\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \otimes \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}}$ satisfait à la condition (b) pour la perversité $\overline{r}+\overline{s}-1$. On obtient ainsi un morphisme

$$\mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}} \otimes \mathbf{I}^\bullet_{\overline{s}} \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\overline{r}+\overline{s}-1}$$

appelé cup-produit. Ce cup-produit fournit sur la cohomologie d'intersection $\mathrm{IH}^*_{\overline{r}}(\mathrm{X}) = \oplus_i \mathrm{IH}^i_r(\mathrm{X})$ un accouplement

$$\mathrm{IH}^*_{\overline{r}}(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{IH}^*_{\overline{s}}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{IH}^*_{\overline{r}+\overline{s}-1}(\mathrm{X})$$

appelé encore cup-produit, noté $(u,v) \mapsto uv$, qui satisfait aux règles de $\mathbb{Z}_2-$commutativité habituelles, et à des règles de compatibilité évidentes quand on augmente la perversité que nous n'écrirons pas.

([2]) Le fait de travailler avec les faisceaux de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels dispense de considérer ici les foncteurs dérivés $\otimes^{\mathrm{L}}$, et la suite spectrale hyperdérivée associée, puisque sur cette catégorie, le foncteur produit tensoriel est exact.

5.6. Dualité de Poincaré

Soit Σ un fermé contenant les points singuliers de X, et R un système local sur $X - \Sigma$. L'isomorphisme $\mathbf{I}^{\bullet}_{\overline{p}^*}(R^*) \simeq R\underline{Hom}(\mathbf{I}^{\bullet}_{\overline{p}}(R), \mathbf{D}^{\bullet}_X)$ conduit, en appliquant le foncteur hypercohomologie H^i à la dualité de Poincaré en cohomologie d'intersection : on obtient, pour $i + j = 2n$ un accouplement

$$IH^i_{\overline{p}}(X, R^*) \otimes IH^j_{\overline{p}^*,c}(X, R) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

qui fait d'un de ces espaces vectoriels le dual de l'autre. En particulier, quand X est compact, pour la perversité moitié, la forme bilinéaire obtenue sur $IH^*(X) = \oplus_p IH^p(X)$ est non dégénérée.

5.7. Fonctorialité

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme projectif de variétés irréductibles. On pose $m = \dim Y$, $n = \dim X$. Il existe une stratification X_ν de X telle que si on pose $Y_\nu = f^{-1}(X_\nu)$ le morphisme induit

$$f_\nu : Y_\nu \longrightarrow X_\nu$$

soit topologiquement localement trivial [27].

Soit $\alpha : [1, n] \longrightarrow [1, m]$ une application croissante telle que $\alpha(1) = 1$. La dérivée de α est définie par $\alpha'(i) = \alpha(i) - \alpha(i-1)$ pour $i \geq 2$, et $\alpha'(1) = 0$. Soit d'autre part $\overline{p} : [1, m] \longrightarrow [1, 2m-1]$ une perversité de niveau m. On considère la fonction $\overline{q} = [1, n] \longrightarrow [1, 2m-1]$ définie par $\overline{q} = \overline{p} \circ \alpha$. Si la dérivée de α est en tout point ≤ 1, cette fonction prend ses valeurs dans $[1, 2n-1]$ et c'est une perversité de niveau n.

Définition 39. — *Soit $\alpha : [1, n] \longrightarrow [1, m]$ une application croissante. On dit que f est $\alpha-$petit si on peut choisir la stratification de* X *de sorte que*

$$\operatorname{codim} Y_\nu \geq \alpha(\operatorname{codim} X_\nu)$$

chaque fois que Y_ν *n'est pas vide.*

Théorème 40. — *Soit $\alpha : [1, n] \longrightarrow [1, m]$ une application croissante telle que $\alpha(1) = 1$ et de dérivée ≤ 1 en tout point. Soient $\overline{p}$ une perversité de niveau m et $\overline{q} = \overline{p} \circ \alpha$. Si f est $\alpha-$petit,*

on a des morphismes canoniques ([3])

$$f^*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X},\overline{q}}) \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y},\overline{p}} \quad ; \quad \mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X},\overline{q}} \longrightarrow \mathrm{R}f_*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y},\overline{p}})$$

$$\mathrm{R}f_!(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y},\overline{p}^*}) \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X},\overline{q}^*}[-2d] \quad ; \quad \mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y},\overline{p}^*} \longrightarrow f^!(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X},\overline{q}^*})[-2d]$$

Démonstration. Il suffit de construire le premier de ces morphismes ; les autres s'en déduisent par adjonction et dualité de Verdier. Au dessus de la grosse strate, le complexe $f^*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X},\overline{p}})$ est quasi-isomorphe à $\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}}$. Il suffit de vérifier que le complexe $f^*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X},\overline{q}})$ satisfait à la condition d'annulation (b') du théorème : en effet, par une stratification bien choisie sur Y, la condition (b) du théorème sera satisfaite, et l'énoncé résulte alors de la propriété universelle . Or, le support de $\mathcal{H}^j(f^*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X}}))$ est évidemment l'image réciproque du support de $\mathcal{H}^j(f^*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X}}))$. Par conséquent, il est contenu dans la réunion des Y_ν tels que X_ν soit de codimension $\geq \min\{i, \overline{q}(i) \geq j\}$. Si pour un tel ν l'ensemble localement fermé Y_ν n'est pas vide, on a par définition de $\overline{q}$

$$\overline{p}(\mathrm{codim}\ \mathrm{Y}_\nu) \geq \overline{q}(\mathrm{codim}\ \mathrm{X}_\nu) \geq j$$

et par conséquent la condition (b'), relative à la perversité $\overline{p}$, est satisfaite sur Y. □

COROLLAIRE 41. — *Soit* $d = \dim \mathrm{Y} - \dim \mathrm{X}$. *Sous les mêmes conditions, on a des morphismes image réciproque et image directe*

$$f^* : \mathrm{IH}^*_{\overline{q}}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{IH}^*_{\overline{p}}(\mathrm{Y}) \text{ et } f_* : \mathrm{IH}^*_{\overline{p}^*}(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{IH}^*_{\overline{q}^*}(\mathrm{X})[-2d]$$

Le premier morphisme est construit en appliquant le foncteur hypercohomologie, et le second s'obtient par dualité de Poincaré.

Remarques

1. Supposons qu'on prenne pour $\overline{p}$ la perversité moitié ; on omet dans ce cas la perversité. Le morphisme $f^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{IH}^*(\mathrm{Y})$ permet de voir cette cohomologie d'intersection comme module sur l'algèbre de cohomologie singulière, et on a alors la formule de projection

$$f_*(f^*(u)v) = uf_*(v)$$

([3]) Barthel, Brasselet, Fieseler, Gabber et Kaup ont montré dans [1] (voir aussi [28]) qu'il existe, en perversité moitié, un morphisme $f^*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X}}) \longrightarrow \mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y}}$ compatible avec l'isomorphisme naturel $f^*(\mathbb{Q}_{\mathrm{X}}) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathrm{Y}}$. Cependant ce morphisme n'est pas canonique.

pour $u \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$ et $v \in \mathrm{IH}^*(\mathrm{Y})$. Autrement dit, f_* est $\mathrm{H}^*(\mathrm{X})-$linéaire. Cette formule doit se lire dans $\mathrm{IH}^*_{\overline{t}}(\mathrm{Y})$; rappelons que $\mathrm{IH}^q_{\overline{t}}(\mathrm{X})$, quand X est normale, coïncide avec l'homologie $\mathrm{H}_{2n-q}(\mathrm{X})$. En particulier, le morphisme f_*f^* est la multiplication par la classe $f_*(1)$.

2. Supposons que X soit rationnellement lisse. Dans ce cas, on peut identifier $\mathrm{H}(\mathrm{X})$ avec $\mathrm{IH}_{\overline{t}}(\mathrm{X})$ et le morphisme composé $f^*f_* : \mathrm{IH}(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{IH}(\mathrm{Y})[-2d]$ a alors un sens.

Exemples.

1. Supposons que f soit fini et surjectif. Alors X et Y sont de même dimension n, et on peut prendre $\alpha = \mathrm{id}$. Dans ce cas, $p = q$, et il n'y a pas de changement de perversité. La classe $f_*(1)$ est le degré du morphisme fini.

C'est la situation que l'on rencontre pour le morphisme de passage au quotient

$$\mathrm{X}^n \longrightarrow \mathrm{S}^n\mathrm{X}$$

quand X est une variété lisse projective. On sait que la cohomologie d'intersection ne dépend pas du choix de la perversité sur $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$, et s'identifie à la cohomologie singulière. On a donc la dualité de Poincaré pour la cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$. On obtient ainsi des morphismes canoniques

$$f^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^n) \text{ et } f_* : \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^n) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$$

2. Supposons que $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ soit fini et que X soit lisse en dehors de l'image de Y. Soit $r = \dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Y}$. On peut trouver une stratification X_ν de X dont la strate dense X_0 soit le complémentaire de $\mathrm{Im}\, f$. Alors Y_0 est vide, pour $\nu \neq 0$, et $\mathrm{codim}\, \mathrm{Y}_\nu = \mathrm{codim}\, \mathrm{X}_\nu - r$ de sorte que si on pose

$$\alpha(i) = \begin{cases} i - r \text{ si } i > r \\ 1 \text{ si } 1 \leq i \leq r \end{cases}$$

le morphisme f est $\alpha-$petit. Cette fonction α satisfait bien aux conditions du théorème. La perversité associée sur X est

$$\overline{q}(i) = \begin{cases} \overline{p}(i - r) \text{ si } i > r \\ 1 \text{ si } 1 \leq i \leq r \end{cases}$$

On obtient en particulier des morphismes

$$f^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{IH}^*(\mathrm{Y}) \text{ et } f_* : \mathrm{IH}^*(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{IH}^*_{\overline{t}}(\mathrm{X})[2r].$$

Dans le cas particulier où X est homologiquement rationnellement lisse, toutes les cohomologies d'intersection sur X coïncident avec la cohomologie ordinaire. Si f est un plongement, l'image

directe $f_*(1)$ est évidemment la classe fondamentale [Y] de Y dans X. On peut alors considérer les morphismes $f_* : \mathrm{IH}^*(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{X})[2r]$ et $f^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{IH}^*(\mathrm{Y})$.

6. Morphismes quasi-petits

Si X est une variété algébrique complexe irréductible, on note $\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X}}$ le complexe d'intersection de X, bien défini dans la catégorie dérivée constructible, relatif à la perversité moitié.

6.1. Petits morphismes

DÉFINITION 42. — *Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme projectif surjectif de variétés algébriques complexes irréductibles de même dimension n. On dit que f est petit si pour tout entier $r > 0$*

$$\operatorname{codim} \{x, \dim f^{-1}(x) \geq r\} > 2r.$$

PROPOSITION 43. — *Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un morphisme projectif birationnel de variétés irréductibles de dimension n. On suppose que f est un petit morphisme, et que* Y *est homologiquement rationnellement lisse. Alors*

$$\mathrm{R}f_*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y}}) = \mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{X}}.$$

Démonstration. Au-dessus d'un ouvert lisse U de X au-dessus duquel f est un isomorphisme, on a un quasi-isomorphisme $\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{X}} \simeq \mathrm{R}f_*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y}})$. Le complexe $\mathrm{R}f_*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y}})$ est un complexe constructible qui satisfait aux conditions du théorème , en prenant $\mathrm{R} = \underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{X}}$ et le quasi-isomorphisme ci-dessus. En effet, puisque Y est homologiquement lisse, le complexe d'intersection $\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y}}$ est isomorphe au faisceau d'orientation, et donc trivial. La condition (a) est triviale. Vérifions la condition (b') du théorème . Le support de $\mathrm{R}^q f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})$ est contenu dans le fermé des points $x \in \mathrm{X}$ tels que $2 \dim f^{-1}(x) \geq q$. Le fait que f soit petit implique que ce support est de codimension $> q$. Reste la condition (c'). Mais la dualité de Verdier (*cf.* théorème) échange le foncteur $\mathrm{R}f_*$ et le foncteur image directe à support propre $\mathrm{R}f_!$: pour tout complexe $\mathrm{A}^\bullet$ constructible sur Y, on a

$$\mathrm{D}_{\mathrm{X}}(\mathrm{R}f_*(\mathrm{A}^\bullet)) = \mathrm{R}f_!(\mathrm{D}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{A}^\bullet))$$

Puisque f est propre, quand on prend pour $\mathrm{A}^\bullet$ le complexe d'intersection sur Y, on voit que le dual de Verdier $\mathrm{D_X}(\mathrm{R}f_*(\mathbf{I}^\bullet_\mathrm{Y}))$ satisfait aussi à la condition (b'). $\square$

6.2. Morphismes quasi-petits

Soient $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ un morphisme projectif de variétés algébriques complexes irréductibles de même dimension n.

Définition 44. — *Un morphisme projectif surjectif $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ de variétés algébriques complexes irréductibles de même dimension est dit quasi-petit si pour tout entier $r \geq 0$,*

$$\operatorname{codim} \{x, \dim f^{-1}(x) \geq r\} \geq 2r.$$

Si f est quasi-petit, on peut trouver une stratification dont les strates X_ν sont des sous-variétés irréductibles lisses localement fermées satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) Au-dessus de X_ν, le morphisme f_ν induit par f est topologiquement localement trivial.

(2) Pour tout $x \in \mathrm{X}_\nu$,

$$c_\nu = \operatorname{codim} \mathrm{X}_\nu \geq 2 \dim_{\mathbb{C}} f_\nu.$$

Dans cette assertion, la dimension de f_ν désigne la dimension complexe de la fibre. Une strate X_ν est dite *essentielle* si on a égalité. Remarquons que si f est un morphisme petit, il est évidemment quasi-petit, et on peut trouver une stratification de X pour laquelle la seule strate essentielle est la strate partout dense.

Soit $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ un morphisme quasi-petit. Dans la suite, on se fixe une stratification satisfaisant aux conditions (1) et (2) ci-dessus. On désigne par $f_\nu : \mathrm{Y}_\nu \to \mathrm{X}_\nu$ le fibré localement trivial induit par au-dessus de X_ν et par d_ν la dimension réelle de la fibre au-dessus de X_ν. Si X_ν est une strate essentielle, c'est aussi la codimension de X_ν. Enfin, soit $j_\nu : \overline{\mathrm{X}}_\nu \hookrightarrow \mathrm{X}$ l'inclusion canonique.

Théorème 45. — *Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme quasi-petit. On suppose que* Y *est homologiquement rationnellement lisse. Considérons le fibré localement trivial $f_\nu : \mathrm{Y}_\nu \to \mathrm{X}_\nu$ et*

le système local $\mathrm{R}_\nu = \mathrm{R}^{d_\nu} f_{\nu *}(\underline{\mathbb{Q}})$ *sur la strate* X_ν. *Alors on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée*

$$\mathrm{R}f_*(\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y}}) = \oplus_{\nu \in \mathcal{U}} j_{\nu,*}(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{X}}_\nu}(\mathrm{R}_\nu))[-d_\nu]$$

où la somme directe porte sur l'ensemble $\mathcal{U}$ *des strates essentielles.*

Cet énoncé est en fait une conséquence d'un théorème de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber qui s'affranchissent en fait de l'hypothèse de lissité sur Y (*cf.* [2], théorème 6.2.5). Sous l'hypothèse de lissité, le complexe $\mathbf{I}^\bullet_{\mathrm{Y}}$ est quasi-isomorphe au faisceau d'orientation, ce qui rend plus facile le calcul des images directes. Remarquons que dans le cas d'un morphisme petit, il n'y a qu'une strate essentielle, et cet énoncé entraîne trivialement la proposition . La remarque essentielle pour la compréhension de cet énoncé est que les complexes constructibles $\mathcal{S}^\bullet$ figurant dans chacun des deux membres de l'égalité ne satisfont pas aux conditions (b') et (c') exigées dans le théorème : ce ne sont donc pas des complexes d'intersection. Par contre, ils satisfont aux conditions suivantes :

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^q(\mathcal{S}^\bullet) \geq q \ ; \ \operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^q(\mathrm{D}_{\mathrm{X}} \mathcal{S}^\bullet) \geq q.$$

De tels complexes constructibles sont appelés pervers. L'énoncé dit essentiellement que par un morphisme quasi-petit, l'image directe d'un complexe pervers reste pervers, et on obtient cet énoncé comme un théorème de structure sur les complexes pervers.

Corollaire 46. — *Sous les mêmes hypothèses, on a pour tout entier i*

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{Y}, \mathbb{Q}) = \oplus_{\nu \in \mathcal{U}} \mathrm{IH}^{i-d_\nu}(\overline{\mathrm{X}}_\nu, \mathrm{R}_\nu)$$

6.3. Faisceaux pervers

Soit X une variété algébrique complexe irréductible, de dimension n, munie d'une stratification. On considère une perversité $\overline{p} : [1, n] \longrightarrow [1, 2n-1]$ de niveau n et on pose $p(\mathrm{S}) = \overline{p}(\operatorname{codim} \mathrm{S})$ si S est de codimension ≥ 1, et $p(\mathrm{S}) = 0$ si S est la strate dense.

Définition 47. — *On dit qu'un complexe constructible* $\mathrm{K}^\bullet$ *est* $\overline{p}$*-pervers relativement à la stratification donnée si sa cohomologie est nulle en degré* < 0, *et si pour toute strate* S *on a,* $j : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{X}$ *désignant l'inclusion canonique*

$$\text{(i)} \quad \mathcal{H}^q(j^*(\mathrm{K}^\bullet)) = 0 \text{ si } q > p(\mathrm{S})$$

$$\text{(ii)} \quad \mathcal{H}^q(j^!(\mathrm{K}^\bullet)) = 0 \text{ si } q < p(\mathrm{S})$$

Exemple

Le complexe d'intersection $\mathbf{I}^\bullet_{\overline{p}}$ est évidemment $\overline{p}$-pervers. L'image directe de $\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}}$ par un morphisme quasi-petit $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ est un faisceau pervers pour la perversité moitié.

Désignons par U_k la réunion des strates de perversité $\leq k$, et par $i : \mathrm{U}_{k-1} \hookrightarrow \mathrm{U}_k$ l'inclusion canonique. Notons $\mathrm{K}^\bullet_k$ la restriction de $\mathrm{K}^\bullet$ à l'ouvert U_k. Alors (i) équivaut à

$$\mathcal{H}^q(\mathrm{K}^\bullet_k) = 0 \tag{5.1}$$

pour $q > k$ et (ii) équivaut au fait que pour $k \geq 1$ le morphisme canonique

$$\mathrm{K}^\bullet_k \longrightarrow \mathrm{R}i_*(\mathrm{K}^\bullet_{k-1}) \tag{5.2}$$

est un quasi-isomorphisme en degré $< k-1$, et est injectif en cohomologie de degré $k-1$. Par dualité de Verdier, la condition (ii) est équivalente à

$$\mathcal{H}^q(j^*\mathrm{D}_{\mathrm{X}}\mathrm{K}^\bullet) = 0$$

pour $q > p^*(\mathrm{S})$.

La proposition qui suit ne sera pas utilisée de manière explicite dans la suite, mais l'argument qu'elle utilise, déjà rencontré au §4.3, est essentiel.

Proposition 48. — *Soient* $\mathrm{A}^\bullet$ *et* $\mathrm{B}^\bullet$ *deux complexes* $\overline{p}-$*pervers. Alors*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{B}^\bullet[-1]) = 0$$

Démonstration. On considère le diagramme commutatif sur l'ouvert U_k

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}^\bullet_k \arrow[r] & \mathrm{R}i_*(\mathrm{A}^\bullet_{k-1}) \arrow[d, "\varphi_k"] \\
\mathrm{B}^\bullet_k[-1] \arrow[r] & \mathrm{R}i_*(\mathrm{B}^\bullet_{k-1}[-1])
\end{tikzcd}$$

Le complexe $\mathrm{A}_k^\bullet$ est acyclique en degré $\geq k+1$ en raison de la condition (1) et la seconde ligne induit en cohomologie un morphisme qui est bijectif en degré $\leq k-1$ et est injectif en degré k. On montre par récurrence sur k que $\mathrm{Hom}(\mathrm{A}_k^\bullet, \mathrm{B}_k^\bullet[-1])$ est nul. C'est évident pour $k=0$, puisque $\mathrm{A}_0^\bullet$ est acyclique en degré ≥ 1 et que $\mathcal{H}^0(\mathrm{B}^\bullet[-1])=0$. Supposons $k \geq 1$ et notre assertion démontrée en degré $k-1$. Le diagramme ci-dessus et le lemme de relèvement montre que c'est vrai en degré k.

Lemme 49. — *Soit* X *une variété algébrique irréductible, munie d'une stratification et équipée de la perversité moitié. Soit* S *une strate de codimension* k*, munie d'un système local* R *. On désigne par* $j : \overline{\mathrm{S}} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *l'inclusion canonique. Le complexe* $j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{R}))[-k]$ *est un complexe pervers dont le dual de Verdier est isomorphe à* $j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{R}^*))[-k]$.

Démonstration. Soit $k = \mathrm{codim}\ \mathrm{S}$. Soit T une strate. Supposons d'abord T contenue dans $\overline{\mathrm{S}}$. Considérons le diagramme d'inclusion

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\rho"'] & \overline{\mathrm{S}} \arrow[d, "j"] \\ & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

On a évidemment $\rho^*(j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{R}))[-k]) = \lambda^*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{R})[-k])$ et ce complexe est donc acyclique en degré q pour $q-k \geq \max(\mathrm{codim}\ \mathrm{T}-k, 1)$ c'est-à-dire dès que $q \geq \mathrm{codim}\ \mathrm{T}$ si $\mathrm{T} \neq \mathrm{S}$, et $q > \mathrm{codim}\ \mathrm{T}$ si $\mathrm{T} = \mathrm{S}$. Si T ne rencontre pas $\overline{\mathrm{S}}$ ce complexe est évidemment nul.

D'autre part, par la dualité de Verdier, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\mathrm{X}}(j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{R}))[-k]) &= j_*(\mathrm{D}_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{R})[-k])) \\ &= j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{S}}}(\mathrm{R}^*)[-k]). \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

Remarque

La démonstration a montré que non seulement que le complexe $\mathrm{K}^\bullet = j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{S}}}[-k])$ est pervers, mais il satisfait à la condition

$$\mathcal{H}^q(\rho^*(\mathrm{K}^\bullet))) = 0 \text{ si } q \geq \mathrm{codim}\ \mathrm{T}$$

pour toute strate $\mathrm{T} \subset \mathrm{X}$ autre que la strate S. Par dualité de Verdier, on obtient pour une telle strate $\mathcal{H}^q(\rho^!(\mathrm{K}^\bullet)) = 0$ si $q \leq \operatorname{codim} \mathrm{T}$.

6.4. Démonstration du théorème 30

Rappelons que dans le contexte de l'énoncé , toutes les variétés algébriques sont équipées de la perversité moitié.

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des strates essentielles. Rappelons que pour une telle strate, d_ν est la codimension de la strate X_ν. On va construire un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{T} = \oplus_{\nu \in \mathcal{U}} j_{\nu *}(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{X}}_\nu}(\mathrm{R}_\nu))[-d_\nu] \longrightarrow \mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{Y}).$$

Construction du morphisme ϕ

On se place sur l'ouvert U_k réunion des strates de codimension $\leq k$, et on construit $\varphi_k = \varphi|_{\mathrm{U}_k}$ par récurrence sur k. Désignons par $i : \mathrm{U}_{k-1} \hookrightarrow \mathrm{U}_k$ l'inclusion canonique, et par $j : \mathrm{F}_k \hookrightarrow \mathrm{U}_k$ l'inclusion du fermé complémentaire de U_{k-1}. La construction de φ_0 sur la grosse strate U_0 est évidente : en effet, les deux membres s'identifient sur cet ouvert au système local R_0. Supposons construit un tel morphisme sur l'ouvert U_{k-1} :

$$\mathcal{T}_{k-1} \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{Y})_{k-1}$$

Considérons le complexe

$$\mathcal{S} := \oplus_{\nu \in \mathcal{U}, d_\nu \leq k-1} j_{\nu *}(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{X}}_\nu}(\mathrm{R}_\nu))[-d_\nu].$$

Ce complexe est acyclique sur U_k en degré $q \geq k$ comme on le voit en remarquant que les strates de codimension k sont distinctes des strates essentielles qui apparaissent dans la somme directe $\mathcal{S}$ (*cf.* remarque ci-dessus). D'autre part par perversité $j^!(\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{Y}))$ est acyclique en degré $\leq k-1$. Il en résulte que le morphisme canonique $\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{Y})_k \longrightarrow \mathrm{R}i_*(\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{Y})_{k-1})$ induit en cohomologie un morphisme bijectif en degré $< k-1$ et injectif en degré $k-1$. De plus, si $j : \mathrm{F}_k \hookrightarrow \mathrm{U}_k$ est l'inclusion du fermé $\mathrm{F}_k = \mathrm{U}_k - \mathrm{U}_{k-1}$, réunion des strates de codimension k, on a en degré k, le complexe $j^!(\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{Y}))$ est acyclique en degré $< k$, et sa cohomologie est en degré k isomorphe à $\oplus_{\nu \in \mathcal{U}, d_\nu = k} \mathrm{R}_\nu$. Dans la suite exacte de cohomologie relative à l'inclusion j

$$\mathrm{R}^{k-1} i_*(\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{Y})_{k-1}) \longrightarrow \oplus_{\nu \in \mathcal{U}, d_\nu = k} j_*(\mathrm{R}_\nu) \longrightarrow \mathrm{R}^k f_*(\underline{\mathbb{Q}}_\mathrm{Y})_k$$

la seconde flèche est évidemment un isomorphisme. Par suite la première flèche est nulle et $\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_k \longrightarrow \mathrm{R}i_*(\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_{k-1})$ induit en cohomologie un isomorphisme en degré $\leq k-1$. Le lemme de relèvement fournit un morphisme $\alpha : \mathcal{S}_k \longrightarrow \mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_k$ et un seul rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_k \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{R}i_*(\mathcal{S}_{k-1}) \arrow[d, "\phi_{k-1}"] \\
\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_k \arrow[r] & \mathrm{R}i_*(\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_{k-1})
\end{tikzcd}$$

Considérons d'autre part le fermé F_k de codimension $d_\nu = k$ de U_k ; l'isomorphisme $j^*(\mathrm{R}^k f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})) = \oplus_{\nu\in\mathcal{U},d_\nu=k}\mathrm{R}_\nu$ fournit un morphisme canonique

$$\beta : \oplus_{\nu\in\mathcal{U},d_\nu=k} j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{X}}_\nu}(\mathrm{R}_\nu))_k[-k] \longrightarrow \mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_k$$

qui est un quasi-isomorphisme en degré k. Considérons la somme directe

$$\mathcal{T} = \oplus_{\nu\in\mathcal{U}} j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{X}}_\nu}(\mathrm{R}^*_\nu))[-d_\nu].$$

Le couple (α, β) définit un morphisme $\varphi_k : \mathcal{T}_k \longrightarrow \mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_k$. On obtient finalement, en prenant $k = n$ un morphisme

$$\phi : \mathcal{T} = \oplus_{\nu\in\mathcal{U}} j_*(\mathbf{I}^\bullet_{\overline{\mathrm{X}}_\nu}(\mathrm{R}_\nu))[-d_\nu] \longrightarrow \mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}}).$$

Le morphisme ϕ est un isomorphisme :

On montre par récurrence sur k que le morphisme ϕ_k induit sur U_k est un isomorphisme. C'est évidemment vrai pour $k = 0$. Au morphisme ϕ est associé un morphisme de triangles distingués

sur l'ouvert U_k

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_k \arrow[rr] \arrow[dd, "\phi_k"'] & & \mathrm{R}i_*(\mathcal{T}_{k-1}) \arrow[dl, "{[+1]}"] \arrow[dd, "\phi_{k-1}"] \\
& j_*j^!(\mathcal{T}) \arrow[ul] \arrow[dd, "\psi"] & \\
\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_k \arrow[rr] & & \mathrm{R}i_*(\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})_{k-1}) \arrow[dl, "{[+1]}"] \\
& j_*j^!(\mathrm{R}f_*(\underline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Y}})) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Les triangles distingués sont ceux qui sont associés au fermé $\mathrm{F}_k \subset \mathrm{U}_k$ réunion des strates de codimension $d_\nu = k$. Le morphisme ψ est un quasi-isomorphisme en degré $\leq k$. L'hypothèse de récurrence entraîne donc que le morphisme ϕ_k est un isomorphisme en degré $\leq k-1$. C'est vrai aussi en degré k puisque $\mathcal{S}$ est acyclique en degré k sur U_k. En degré $> k$ les deux complexes sont acycliques. Il en résulte que ϕ_k est lui-même un isomorphisme. D'où le théorème. □

7. Fin du calcul

Revenons au morphisme $\pi : \mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{S}^n\mathrm{X}$ de Hilbert-Chow associé à une surface algébrique quasi-projective X. D'après le lemme c'est un morphisme quasi-petit. Considérons la stratification S^n_ν définie dans la section 3, indexée par les partitions de n. Au-dessus de S^n_ν le morphisme induit π_ν est localement trivial, et la dimension des fibres est $n - \ell_\nu$. Posons $d_\nu = 2(n - \ell_\nu)$, et désignons par H^n_ν l'image réciproque de S^n_ν par le morphisme π, et par $\pi_\nu : \mathrm{H}^n_\nu \longrightarrow \mathrm{S}^n_\nu$ la restriction de π à H^n_ν. Considérons le système local au-dessus de $\mathrm{S}^n_\nu = \mathrm{S}^n_\nu\mathrm{X}$ défini par le faisceau localement constant $\mathrm{R}^{d_\nu}\pi_{\nu*}(\mathbb{Q})$. Le corollaire ci-dessus montre que

THÉORÈME 50. — *On a*

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}), \mathbb{Q}) = \oplus_\nu \mathrm{IH}^{i-d_\nu}(\overline{\mathrm{S}}^n_\nu\mathrm{X}, \mathrm{R}^{d_\nu}\pi_{\nu*}(\mathbb{Q})).$$

Dans cette formule, la cohomologie qui intervient est la cohomologie d'intersection de $\overline{\mathrm{S}}^n_\nu \mathrm{X}$ à valeurs dans le faisceau localement constant $\mathrm{R}^{d_\nu}\pi_{\nu *}(\underline{\mathbb{Q}})$ sur S^n_ν. Puisque les fibres de π sont irréductibles ([5]) d'après Briançon [5], ce faisceau est en fait canoniquement isomorphe au faisceau constant, cette formule nous ramène à calculer la cohomologie d'intersection de ces variétés singulières.

Les deux points essentiels sont les suivants :

1) On a un morphisme fini et birationnel

$$\mu_\nu : \mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{X} \times \mathrm{S}^{\alpha_2}\mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathrm{S}}^n_\nu \mathrm{X}$$

donné par $(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_k) \mapsto \sum_i i\mathrm{Z}_i$. Un tel morphisme est petit, et d'après la proposition la cohomologie d'intersection reste inchangée.

2) De plus, le premier membre est lisse en homologie rationnelle, car c'est le quotient d'une variété lisse par un groupe fini ; dans ces conditions, la cohomologie d'intersection coïncide avec la cohomologie ordinaire.

Il résulte alors de la formule de Künneth que

$$\mathrm{IH}^*(\overline{\mathrm{S}}^n_\nu) = \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{X}) \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{X})$$

et par suite, en tenant compte du décalage de degré

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})) = \oplus_\nu \mathrm{IH}^*(\overline{\mathrm{S}}^n_\nu \mathrm{X})[-d_\nu]$$

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}))[2n] = \bigoplus_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \\ \sum i\alpha_i = n}} \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{X})[2\alpha_1] \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{X})[2\alpha_k]$$

Compte-tenu de la formule de Macdonald, la dimension de la cohomologie de $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ est alors donnée par

$$\sum_n q^n \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} q^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k} \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{X}) \ldots \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{X})$$

$$= \prod_{m \geq 1} \frac{(1+q^m)^{d_-}}{(1-q^m)^{d_+}}$$

([5]) Les fibres de π ne sont pas réduites *cf.* [5]

8. Algèbre de Heisenberg et espace de Fock

Pour simplifier, nous supposons dans cette section que X est une surface projective lisse.

8.1. L'algèbre de Hopf $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})$

Considérons la somme disjointe $\mathrm{S}^*\mathrm{X} = \sum_{n\geq 0}\mathrm{S}^n\mathrm{X}$, et désignons par $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}) = \oplus_n \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{X})$ la cohomologie de $\mathrm{S}^*\mathrm{X}$ à support compact. Cet espace vectoriel est bigradué par le poids n, et le degré cohomologique. Puisque la cohomologie de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ s'identifie à la cohomologie d'intersection, la dualité de Poincaré permet d'associer au morphisme naturel $\mu : \mathrm{S}^*\mathrm{X}\times\mathrm{S}^*\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{S}^*\mathrm{X}$ défini par l'addition des cycles un morphisme image directe

$$\mu_* : \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})\otimes\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}) = \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}\times\mathrm{S}^*\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*(\mathrm{X})$$

en cohomologie, et par suite une structure d'algèbre bigraduée associative donnée par $(u,v)\mapsto \mu_*(u\times v)$ et satisfaisant à la règle de commutation $uv = (-1)^{pq}vu$ pour u et v homogène de bidegré (n,p) et (m,q) respectivement.

On a vu dans la section 2 que l'on a en fait un isomorphisme d'algèbres bigraduées

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}) = \mathrm{SH}^*(\mathrm{X}) = \mathrm{SH}^+\otimes\wedge\mathrm{H}^-$$

et cet isomorphisme est compatible avec la bigraduation donnée par le poids n et le degré ; le poids d'un élément $u\in\mathrm{H}^*\mathrm{X}$ est 1 ; le degré de u est son degré cohomologique. Cette remarque permet en fait de lire tous les nombres de Betti.

Corollaire 51. — *Soient b_i les nombres de Betti de* X. *Le polynôme de Poincaré de* $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ *est donné par la formule*

$$\mathrm{P}(q,t) = \sum_n q^n\mathrm{P}_t(\mathrm{S}^n\mathrm{X}) = \prod_i (1-(-1)^i t^i q)^{(-1)^{i+1}b_i}$$

Puique le morphisme μ est propre, on a aussi un morphisme image réciproque $\mu^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})\otimes\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})$ qui donne à $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})$ une structure d'algèbre de Hopf (*cf.* Spanier [25], page 267).

Pour la forme d'intersection, les morphismes μ_* et μ^* sont transposés l'un de l'autre. Dans l'isomorphisme ci-dessus, la forme d'intersection est une forme bilinéaire $\mathbb{Z}_2$-symétrique

par rapport à la parité du degré cohomologique, donnée pour u et $v \in \mathrm{H}_+$ et u_i et $v_j \in \mathrm{H}_-$ par

$$\langle u^p \otimes u_1 \wedge \ldots \wedge u_q, v^p \otimes v_1 \wedge \ldots \wedge v_q \rangle = p! \langle u, v \rangle^p \det(\langle u_i, v_j \rangle)$$

Interprétation de $\mathrm{S}(\mathrm{H}^*\mathrm{X})$ *comme représentation d'une algèbre de Clifford*

Considérons l'algèbre de Lie bigraduée $\mathrm{End}(\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}))$ des endomorphismes de l'espace vectoriel gradué $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})$, où le crochet est défini par

$$[a, b] = ab - (-1)^{pq} ba$$

pour a et b homogènes de bidegrés respectifs (n, q) et (m, q). Pour $v \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$, de degré q désignons par $e(v)$ la multiplication à gauche par v dans $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X})$, et par $i(v)$ le produit intérieur par v. Ces opérateurs sont homogènes de bidegrés $(1, q)$ et $(-1, -q)$ respectivement ; ils sont de carré nul et on a

$$[i(v), e(w)] = \langle v, w' \rangle \mathrm{id}$$

pour v et $w \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$.

Soit $\mathrm{K} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$ la somme directe de deux exemplaires de $\mathrm{H} = \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$. On considère sur K la forme bilinéaire $\mathbb{Z}_2-$antisymétrique définie par

$$\langle (v, w), (v', w') \rangle = \langle v, w' \rangle - \langle w, v' \rangle.$$

Considérons l'algèbre de Clifford généralisée $\mathcal{K}(\mathrm{H})$ définie par le quotient de l'algèbre tensorielle de K par l'idéal engendré par les éléments $[v, w] - \langle v, w \rangle$ pour v et $w \in \mathrm{K}$. L'application

$$\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}))$$

définie par $(v, w) \mapsto i(v) + e(w)$ fournit une représentation de $\mathcal{K}(\mathrm{H})$ dans $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}) = \mathrm{SH}^*(\mathrm{X})$; cette représentation est clairement irréductible, car elle est engendrée par les vecteurs $e(v_1) \ldots e(v_m)1$, pour $v_i \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$.

8.2. L'espace vectoriel bigradué $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$

Pour décrire la cohomologie de $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$, on peut aussi introduire l'espace vectoriel $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X})) = \oplus_n \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}))$ muni de ses deux graduations naturelles, donnée par le

poids n et degré cohomologique. On introduit pour ceci l'idéal de l'algèbre des polynômes à coefficients dans H(X)

$$\mathrm{H(X)} \otimes_{\mathbb{Q}} t\mathbb{Q}[t]$$

muni de deux graduations appelées respectivement poids et degré cohomologique, définis pour $u \in \mathrm{H(X)}$ homogène par

$$\text{poids } ut^n = n$$
$$\deg ut^n = \deg u + 2(n-1).$$

Considérons l'algèbre $\mathrm{S}(\mathrm{H(X)} \otimes_{\mathbb{Q}} t\mathbb{Q}[t])$ quotient de l'algèbre tensorielle de $\mathrm{H(X)} \otimes_{\mathbb{Q}} t\mathbb{Q}[t]$ par l'idéal homogène engendré par les crochets $[u, v] = uv - (-1)^{pq} vu$ pour u et v homogènes de degré cohomologique p et q. Cette algèbre est appelée algèbre $\mathbb{Z}_2-$symétrique de l'espace vectoriel bigradué $\mathrm{H(X)} \otimes_{\mathbb{Q}} t\mathbb{Q}[t]$; elle est munie de deux graduations, par le poids et par le degré.

Considérons les plongements $\lambda_m : \mathrm{H(X)} \longrightarrow \mathrm{H(X)} \otimes t\mathrm{Q}[t]$ défini par $a \mapsto at^m$. On a un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots} \mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{H(X)} \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{H(X)}[-2\sum_i (i-1)\alpha_i] \simeq \mathrm{S}(\mathrm{H(X)} \otimes t\mathbb{Q}[t])$$

qui associe à la classe $a_1 \otimes \ldots \otimes a_k$, où $a_i \in \mathrm{S}^{\alpha_i}\mathrm{H(X)}$ l'élément $\mathrm{S}^{\alpha_1}\lambda_1(a_1)\ldots\mathrm{S}^{\alpha_k}\lambda_k(a_k)$. Cet isomorphisme est compatible avec le poids et le degré, qui sont définis au premier membre par

$$\text{poids } a_1 \otimes \ldots \otimes a_k = \sum i\alpha_i$$
$$\deg a_1 \otimes \ldots \otimes a_k = \sum \deg a_i.$$

Si les a_i sont homogènes, l'image de $a_1 \otimes \ldots \otimes a_k$ est de poids $n = \sum_i i\alpha_i$ et de degré $\sum_i \deg a_i + 2\sum_i (i-1)\alpha_i$ ce qui explique le décalage de degré dans la formule. La formule de la section 6 peut alors se lire :

THÉORÈME 52. — *On a un isomorphisme d'espaces vectoriels bigradués :*

$$\Phi : \mathrm{S}(\mathrm{H(X)} \otimes_{\mathbb{Q}} t\mathbb{Q}[t]) \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$$

De plus, l'application linéaire $\mathrm{H}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathbb{Q}} t\mathbb{Q}[t]$ *définie par* $\alpha \mapsto \alpha t$ *est compatible avec le degré cohomologique, et le morphisme associé*

$$\mathrm{S}(\mathrm{H}(\mathrm{X})) \longrightarrow \mathrm{S}(\mathrm{H}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathbb{Q}} t\mathbb{Q}[t])$$

associé n'est autre que le morphisme associé en cohomologie au morphisme de Hilbert-Chow.

Sous cette forme, on obtient en fait les nombres de Betti :

COROLLAIRE 53. — *Le polynôme de Poincaré de* $\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ *est donné par*

$$\mathrm{H}(q,t) = \sum_{n\geq 0} q^n \mathrm{P}_t(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})) = \prod_{m=1}^{\infty} \mathrm{P}(q^m t^{2m-2}, t).$$

Démonstration. Ecrivons $\mathrm{P}_i(t) = \mathrm{P}_t(\mathrm{S}^i\mathrm{X})$. La formule ci-dessus entraîne

$$\mathrm{P}_t(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}) = \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \\ \sum_i i\alpha_i = n}} t^{2\alpha_2+\ldots+2(k-1)\alpha_k} \mathrm{P}_{\alpha_1}(t)\ldots\mathrm{P}_{\alpha_k}(t)$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(q,t) &= \sum_n q^n \mathrm{P}_t(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})) \\
&= \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots} q^{\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+k\alpha_k} t^{2\alpha_2+\ldots+2(k-1)\alpha_k} \mathrm{P}_{\alpha_1}(t)\ldots\mathrm{P}_{\alpha_k}(t) \\
&= \prod_{k\geq 1} \mathrm{P}(q^k t^{2k-2}, t)
\end{aligned}$$

□

8.3. La structure multiplicative sur $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$

Dans l'isomorphisme du théorème , le membre de gauche est une algèbre bigraduée. Par transport, on obtient aussi une structure d'algèbre bigraduée sur $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$. On se propose de décrire ce que signifie cette structure multiplicative. Précisons d'abord

l'isomorphisme du théorème . On considère le diagramme associé à une partition ν de n, à laquelle correspond des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathrm{H}}^n_\nu \arrow[r, "i_\nu"] \arrow[d, "\pi_\nu"] & \mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}) \\ \mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{X} \arrow[r, "\mu_\nu"] & \overline{\mathrm{S}}^n_\nu & \end{tikzcd}$$

où i_ν est l'inclusion canonique. En cohomologie d'intersection on a un morphisme image directe $i_{\nu,*} : \mathrm{IH}^*(\overline{\mathrm{H}}^n_\nu) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}))$ qui augmente le degré de d_ν. Le morphisme μ induit un isomorphisme en cohomologie d'intersection. Alors le morphisme

$$\mathrm{S}^{\alpha_1}\mathrm{H}(\mathrm{X}) \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}^{\alpha_k}\mathrm{H}(\mathrm{X})[-d_\nu] = \mathrm{IH}(\overline{\mathrm{S}}^n_\nu\mathrm{X})[-d_\nu] \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n\mathrm{X})$$

est donné ([6]) pour $a_i \in \mathrm{S}^{\alpha_i}\mathrm{H}(\mathrm{X})$

$$a_1 \otimes \ldots \otimes a_k \mapsto i_{\nu,*}\pi^*_\nu(a_1 \times \ldots \times a_k).$$

Considérons l'espace topologique

$$\overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X} = \sum_{n,\nu} \overline{\mathrm{S}}^n_\nu\mathrm{X}$$

et posons

$$\mathrm{H}^*(\overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X}) = \oplus_{n,\nu}\mathrm{H}^*(\overline{\mathrm{S}}^n_\nu(\mathrm{X}))[-d_\nu].$$

La somme des cycles définit une opération $s : \overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X} \times \overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X} \longrightarrow \overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X}$ d'où il résulte par image directe pour la cohomologie d'intersection à support compact un morphisme

$$s_* : \mathrm{IH}(\overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X}) \otimes \mathrm{IH}(\overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{IH}(\overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X})$$

ce qui donne une structure d'algèbre bigraduée à $\mathrm{IH}(\overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X})$; le morphisme $\mu_* = \oplus_\nu \mu_{\nu,*}$ est alors un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{S}(\mathrm{H}(\mathrm{X}) \otimes \mathbb{Q}[t]) \simeq \mathrm{IH}(\overline{\mathrm{S}}^*_*\mathrm{X}).$$

On obtient donc

([6]) En principe les propriétés de fonctorialité de la section 4.7 nécessitent un décalage de perversité, qu'il faudrait examiner attentivement ; la démonstration de la section 5 a montré qu'on pouvait travailler sans problème en perversité moitié sur $\overline{\mathrm{S}}^n_\nu$. Le résultat principal de l'article [1] permet aussi de surmonter cette difficulté.

Proposition 54. — *L'isomorphisme*

$$\oplus_\nu i_{\nu,*}\pi_\nu^* : \mathrm{IH}(\overline{\mathrm{S}}_*^*\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$$

est un isomorphisme d'algèbres bigraduées.

On peut encore considérer le morphisme s^* qui fournit un morphisme

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X})) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X})) \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$$

faisant de $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$ une algèbre de Hopf bigraduée.

8.4. Calcul de la forme d'intersection

Nous avons décrit la forme d'intersection sur $\mathrm{S}^*\mathrm{H}^*(\mathrm{X})$ au paragraphe 7.1. On en déduit la forme d'intersection sur $\mathrm{IH}^*(\overline{\mathrm{S}}_*^*\mathrm{X})$. Le lemme suivant permet le calcul de cette forme d'intersection dans $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$.

Lemme 55. — *Soit ν une partition de n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ la suite d'entiers ≥ 0 associée.*

(i) *Soit a et $b \in \mathrm{IH}^*(\overline{\mathrm{S}}_\nu^n)$, homogènes, tels que $\deg a + \deg b = 4n - 2d_\nu$. Alors*

$$\langle i_{\nu,*}\pi_\nu^* a, i_{\nu,*}\pi_\nu^* b\rangle = (-1)^{n-\ell_\nu} \prod_{j\geq 1} j^{\alpha_j} \ \langle a, b\rangle$$

(ii) *Les sous-espaces $\mathrm{IH}^*(\overline{\mathrm{S}}_\nu^n)$ sont deux à deux orthogonaux dans $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n\mathrm{X})$.*

Démonstration. Considérons la classe fondamentale $[\overline{\mathrm{H}}_\nu^n]$ de $\overline{\mathrm{H}}_\nu^n$ dans $\mathrm{H}^{d_\nu}(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}))$, et notons h_ν^n sa restriction à $\overline{\mathrm{H}}_\nu^n$. Cette classe est de degré d_ν et son image directe est un nombre $d_\nu^n = \deg \pi_{\nu,*}(\mathrm{h}_\nu^n)$, qui n'est autre que le nombre d'intersection de la fibre de π_ν (qui est de dimension $n - \ell_\nu$) avec $\overline{\mathrm{H}}_\nu^n$ (qui est de dimension $n + \ell_\nu$). On a alors

$$\langle i_{\nu,*}\pi_\nu^* a, i_{\nu,*}\pi_\nu^* b\rangle = d_\nu^n \langle a, b\rangle$$

On doit montrer que ce degré est

$$d_\nu^n = (-1)^{n-\ell_\nu} \prod_{j\geq 1} \nu_j^*$$

Le calcul a été fait par Ellingsrud et Strømme pour $\nu = [n]^* = \underbrace{[1,\ldots,1]}_{n fois}$: la partition duale est alors $\nu^* = [n]$, et $\ell_\nu = 1$. Le sous-schéma $\Delta_n = \mathrm{H}^n_{[n]^*}$ est l'image réciproque de la petite diagonale de $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ par le morphisme de Hilbert-Chow $\pi : \mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{S}^n\mathrm{X}$, et est de dimension $n+1$. La fibre du morphisme $\Delta_n \longrightarrow \mathrm{X}$ induit par π est de dimension $n-1$.

Lemme 56. — (Ellingsrud et Strømme [8]) *Soit* $\nu = [n]^* = \underbrace{[1,\ldots,1]}_{n fois}$. *Posons* $\mathrm{h}_n = \mathrm{h}^n_{[n]^*}$ *On a*

$$d^n_{[n]^*} = \pi_{\nu,*}(\mathrm{h}_n) = (-1)^{n-1}n$$

Dans le cas général, posons $\ell = \ell_\nu$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{\nu_1^*} \times \Delta_{\nu_2^*} \times \ldots \times \Delta_{\nu_\ell^*} \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d] & \overline{\mathrm{H}}^n_\nu \arrow[d, "\pi_\nu"] \\
\mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{X} \arrow[r] & \overline{\mathrm{S}}^n_\nu
\end{tikzcd}$$

dans lequel la première flèche verticale est le produit des morphismes induits par les morphismes de Hilbert-Chow ; la première flèche horizontale est l'application rationnelle qui à $(\mathrm{Z}_1,\ldots,\mathrm{Z}_\ell)$ associe le sous-schéma réunion des sous-schémas Z_i, sous réserve que leurs supports soient disjoints. La seconde flèche horizontale est l'application $(a_1,\ldots,a_\ell) \mapsto \sum_{i=1}^\ell \nu_i^* a_i$. Au voisinage d'une fibre générique, l'application rationnelle horizontale φ est régulière, et le diagramme est cartésien. Il en résulte que $\varphi^*(\mathrm{h}^n_\nu) = \mathrm{h}_{\alpha_1^*} \times \ldots \times \mathrm{h}_{\alpha_\ell^*}$. Compte-tenu du lemme d'Ellingsrud et Strømme, et du fait que ν^* est la seule suite décroissante sur $[1,\ell]$ qui prend α_i fois la valeur i, on obtient

$$\begin{aligned} d^n_\nu &= \prod_{i\geq 1} d^{\nu_i^*}_{[\nu_i^*]^*} \\ &= (-1)^{n-\ell} \prod_{i\geq 1} i^{\alpha_i} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que les sous-espaces $\mathrm{IH}^*(\overline{\mathrm{S}}^n_\nu)$ sont deux à deux orthogonaux. Par le même argument, il suffit de voir si λ est une autre partition de n, que la fibre générique de

π_ν ne rencontre pas le sous-schéma $\overline{\mathrm{H}}^n_\lambda$. Mais, cette fibre est contenue dans H^n_ν. Une telle strate ne rencontre pas H^n_λ, ni dans son adhérence, qui est réunion de strates de codimension supérieure, correspondant à des partitions de plus petite longueur que $\ell = \ell_\nu$. $\square$

8.5. Algèbre de Clifford-Heisenberg d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2-$gradué.

Soit V un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, muni d'une forme bilinéaire $\mathbb{Z}_2$-symétrique ; ceci signifie que V^+ et V^- sont orthogonaux ; sur V_+ cette forme bilinéaire est symétrique, et sur V^- elle est antisymétrique. Considérons l'espace vectoriel $\mathrm{W} = \mathrm{V} \otimes \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ des sommes finies $\sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i t^i$ à coefficients u_i dans V, muni des deux graduations à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}_2$ respectivement, définies par

$$\begin{aligned} \text{poids } ut^n &= n \\ \deg ut^n &= \deg u \text{ dans } \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

On considère sur cet espace vectoriel la forme bilinéaire définie pour u et $v \in \mathrm{V}$ par

$$\langle ut^n, vt^m \rangle = (-1)^n n \delta_{n+m,0} \langle u, v \rangle.$$

Elle est $\mathbb{Z}_2-$antisymétrique, et a pour noyau $\mathrm{V} \subset \mathrm{W}$.

Définition 57. — *L'algèbre de Clifford-Heisenberg* $\mathcal{H}(\mathrm{V})$ *est le quotient de l'algèbre tensorielle de* $\mathrm{W} = \mathrm{V}[t, t^{-1}]$ *par l'idéal engendré par les éléments de la forme*

$$[u, v] - \langle u, v \rangle$$

pour $u, v \in \mathrm{W}$.

On obtient ainsi une algèbre de Lie $\mathbb{Z}_2-$graduée dont le centre est l'algèbre $\mathbb{Z}_2-$symétrique SV.

8.6. L'espace de Fock

Considérons l'espace vectoriel $\mathrm{W}_+ = \mathrm{V} \otimes t\mathbb{Q}[t]$ des polynômes à coefficients dans V, sans terme constant, et l'algèbre $\mathbb{Z}_2-$symétrique associée, définie par

$$\mathrm{F}(\mathrm{V}) = \mathrm{S}(\mathrm{V} \otimes t\mathbb{Q}[t]).$$

La $q-$dimension de F(V) est donnée par la formule

$$\sum_n q^n \dim \mathrm{F}(\mathrm{V})_n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^n)^{\dim \mathrm{V}_-}}{(1-q^n)^{\dim \mathrm{V}_+}}.$$

C'est une sous-algèbre bigraduée de $\mathcal{H}(\mathrm{V})$. L'espace vectoriel $\mathrm{W} = \mathrm{V}[t, t^{-1}]$ est en outre muni d'une involution $\iota : \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{W}$ définie par $vt^n \longrightarrow vt^{-n}$. On dispose alors forme bilinéaire $\mathbb{Z}_2-$symétrique sur W en posant pour w et $z \in \mathrm{W}$

$$(w, z) = \langle \iota w, z \rangle$$

c'est-à-dire de manière plus explicite $(ut^n, vt^m) = (-1)^{n-1} n \langle u, v \rangle \delta_{n,m}$. Cette forme bilinéaire a pour noyau V, et induit sur W_+ une forme bilinéaire non dégénérée. On en déduit sur SW_+ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Dès lors, on peut considérer le produit intérieur $i(w) : \mathrm{F}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{V})$ et la multiplication $e(w) : \mathrm{F}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{V})$, dite aussi produit extérieur par les éléments w de W_+; si w est homogène, ces opérateurs sont aussi homogènes et de bidegrés respectifs $(-\text{poids } w, \deg w)$ et $(\text{poids } w, \deg w)$. On pose, pour $v \in \mathrm{V}$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathfrak{q}_n(v) = e(vt^n),$$

pour $n > 0$; pour $n < 0$, on pose

$$\mathfrak{q}_n(v) = i(vt^{-n}).$$

Enfin, on pose $\mathfrak{q}_0 = 0$. Des propriétés de l'algèbre symétrique associée à un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2-$gradué il résulte l'énoncé suivant :

Proposition 58. — *On a pour v et $w \in \mathrm{V}$ et m et $n \in \mathbb{Z}$*

$$[\mathfrak{q}_n(v), \mathfrak{q}_m(w)] = \langle vt^n, wt^m \rangle$$

L'application

$$\mathrm{V} \otimes \mathbb{Q}[t, t^{-1}] \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{F}(\mathrm{V}))$$

définie par $vt^n \mapsto \mathfrak{q}_n(v)$ se prolonge alors en une représentation de l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}(\mathrm{V})$ notée $\mathrm{F}(\mathrm{V})$, appelée représentation de Fock de $\mathcal{H}(\mathrm{V})$. Cette représentation est évidemment irréductible, engendrée par l'élément unité 1.

8.7. Action de l'algèbre de Heisenberg sur la cohomologie

Soit X une surface algébrique lisse projective, $\mathrm{H}^*(\mathrm{X})$ l'algèbre de cohomologie rationnelle ; on peut la graduer par $\mathbb{Z}_2$ par la parité du degré cohomologique. Considérons l'espace vectoriel

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X})) = \oplus_{n \geq 0} \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})).$$

Le résultat fondamental est que cet espace vectoriel peut être vu comme représentation irréductible de l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$. Autrement dit, on peut trouver un isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))-$modules

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X})) \simeq \mathrm{F}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X})).$$

On a déjà trouvé au §7.2 un isomorphisme naturel entre ces deux espaces vectoriels bigradués. Il s'agit donc essentiellement de trouver une interprétation géométrique des opérateurs $\mathfrak{q}_i(v)$.

On va définir, en suivant Nakajima [24], une action naturelle de $\mathcal{H}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$ sur l'espace bigradué $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$. Il considère pour ceci, pour i entier > 0, le sous-schéma $\mathrm{H}^{n+i,n}$ de $\mathrm{Hilb}^{n+i}(\mathrm{X}) \times \mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X})$ des couples $(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2)$ tels que $\mathrm{Z}_2 \subset \mathrm{Z}_1$ et les projections

canoniques

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^{n+i,n} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & \mathrm{Hilb}^n(\mathrm{X}) \\ \mathrm{Hilb}^{n+i}(\mathrm{X}) & \end{tikzcd}$$

On dispose d'un morphisme de Hilbert-Chow $\pi : \mathrm{H}^{n+i,n} \longrightarrow \mathrm{S}^i\mathrm{X}$ qui envoie $(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2)$ sur le

cycle défini par la différence des cycles associés à Z_1 et Z_2. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & H^{n+i,n} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\rho"] & S^iX \end{tikzcd}$$

où ρ est le morphisme diagonal. Considérons l'image réciproque $Q^{i,n}$ de la petite diagonale de S^iX donnée par le plongement ρ. Ce sous-schéma ([7]) est de dimension $2n+i+1$, et on dispose d'un morphisme $\pi : Q^{i,n} \longrightarrow X$. L'ensemble sous-jacent est donné par les couples (Z_1, Z_2) tels que le support de l'idéal de Z_2 dans Z_1 soit réduit à un point. On a alors un plongement

$$Q^{n,i} \hookrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^n(X) \times \mathrm{Hilb}^{n+i}(X)$$

On pose pour $v \in H(X)$ et $\alpha \in H^*(\mathrm{Hilb}^n(X))$

$$q_i(v)(\alpha) = \mathrm{pr}_{3,*}([Q^{i,n}].\mathrm{pr}_{12}^*(v \times \alpha))$$

Ceci définit une application linéaire $H^*(\mathrm{Hilb}^*(X)) \longrightarrow H^*(\mathrm{Hilb}^*(X))$ homogène de bidegré $(i, \deg v + 2i - 2)$.

Lemme 59. — *L'opérateur $q_i(v)$ défini ci-dessus est la multiplication extérieure par vt^i.*

Ce lemme résulte de l'identification de l'algèbre $H^*(\mathrm{Hilb}^*(X))$ donnée dans la proposition . De même, en remplaçant i par $-i$, ce qui revient à intervertir les facteurs, on définit pour $v \in H^*(X)$ et $i > 0$ une application linéaire $p_i(v) : H^*(\mathrm{Hilb}^*(X)) \to H^*(\mathrm{Hilb}^*(X))$ homogène de bidegré $(-i, \deg v - 2i - 2)$ en posant pour $\alpha \in H^*(\mathrm{Hilb}^{n+i}(X))$

$$p_i(v)(\alpha) = \mathrm{pr}_{2,*}([Q^{i,n}].\mathrm{pr}_{13}^*(v \times \alpha))$$

Lemme 60. — *L'application $p_i(v)$ est la transposée, pour la dualité de Poincaré, de $q_i(v)$.*

([7]) On ignore si ce sous-schéma est irréductible.

Ce lemme résulte essentiellement du théorème de projection en cohomologie d'intersection. On pose pour $i < 0$, $q_i(v) = p_{-i}(v)$, et $q_i(v) = 0$ pour $i = 0$.

THÉORÈME 61. — (Nakajima, Grojnowski, Ellingsrud et Strømme).

(i) *On a pour tout v et $w \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$ et m et n entiers*

$$[q_n(v), q_m(w)] = (-1)^n n \langle v, w \rangle \delta_{n+m,0}$$

Autrement dit, l'application $\mathrm{H}^*(\mathrm{X})[t, t^{-1}] \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X})))$ *définie par* $vt^n \mapsto q_n(v)$ *définit une représentation de l'algèbre de Heisenberg* $\mathcal{H}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$ *sur* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$.

(ii) *L'isomorphisme du théorème*

$$\mathrm{F}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X})) \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$$

est un isomorphisme de représentations de l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$.

Démonstration. On sait déjà que l'isomorphisme

$$\mathrm{F}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X})) \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$$

est un isomorphisme d'algèbre bigraduées. Donc il commute avec les opérateurs $q_i(v)$, pour $i \geq 0$. Pour voir qu'il commute avec les opérateurs $p_i(v)$ il suffit de vérifier que cet isomorphisme est compatible avec la forme bilinéaire $\mathbb{Z}_2-$symétrique sur le premier facteur, et la forme d'intersection sur le second. Compte-tenu de la description de cet isomorphisme donnée au §7.2, ceci résulte du lemme . Ceci achève la démonstration. □

Remarques

1. Le point fondamental est le lemme d'Ellingsrud et Strømme. Soit M_i le sous-schéma de $\mathrm{Hilb}^i(\mathrm{X})$ des Z dont le support est un point, et $\mathrm{M}_{p,i}$ le sous-schéma des Z dont le support est un point fixé p. On a alors $\dim \mathrm{M}_{p,i} = i - 1$ et $\dim \mathrm{M}_i = i + 1$. On a alors, d'après la formule de Ellingsrud et Strømme

$$[\mathrm{M}_i].[\mathrm{M}_{p,i}] = (-1)^{i-1} i.$$

2. Soit Σ une courbe lisse sur X. Cette courbe définit un élément $v \in \mathrm{H}^2(\mathrm{X})$. Alors (*cf.* [23])

$$p_i(v)([\mathrm{S}^n \Sigma]) = [\mathrm{S}^{n-i} \Sigma]$$

3. L'application $\mathcal{H}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X})) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$ définie par $w \mapsto w.1$ s'annule sur l'idéal engendré par le sous-espace vectoriel $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}) \otimes \mathbb{Q}[t^{-1}]$ de $\mathrm{H}^*(\mathrm{X})[t, t^{-1}]$. Cet idéal est exactement l'annulateur de l'élément unité de $\mathrm{F}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$. Il en résulte que cette application se factorise en un morphisme de représentations de $\mathcal{H}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$

$$\mathrm{F}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X})) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$$

qui n'est autre que l'isomorphisme ci-dessus, puisqu'il envoie l'unité sur l'unité.

4. Revenons à l'algèbre $\mathcal{K}(\mathrm{H})$ considérée au §7.1. L'inclusion $\mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{H}[t, t^{-1}]$ définie par $(v, w) \longrightarrow vt^{-1} + wt$ est compatible avec la forme bilinéaire $\mathbb{Z}_2$-antisymétrique définie sur chacun de ces espaces vectoriels gradués ; on en déduit un plongement

$$\mathcal{K}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X})) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$$

ce qui permet de regarder $\mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$ comme un module sur $\mathcal{K}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$. Le morphisme d'algèbres bigraduées induit par le morphisme d'Hilbert-Chow

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^*\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^*(\mathrm{X}))$$

est $\mathcal{K}(\mathrm{H}^*(\mathrm{X}))$-linéaire.

9. Courbes rationnelles tracées sur des surfaces

On se propose d'expliquer comment Beauville [3] utilise le calcul des nombres de Betti du schéma de Hilbert pour trouver le nombre de courbes rationnelles dans certains systèmes linéaires sur des surfaces K3.

9.1. Faisceaux semi-stables de dimension 1

Soit X une surface algébrique projective lisse, munie d'un fibré ample H, et soit χ un entier. On désigne par h la classe de Chern de H. Rappelons qu'un faisceau algébrique cohérent sur X est de dimension 1 si son support est de dimension 1 ; on dit qu'un tel faisceau est pur s'il n'a pas de sous-faisceau cohérent dont le support est fini.

Définition 62. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de dimension 1 sur* X. *On appelle degré (ou multiplicité de* F*) le nombre* $\deg(\mathrm{F}) = [\mathrm{F}].h$, *où* $[\mathrm{F}] \in \mathrm{H}_2(\mathrm{X}, \mathbb{Z})$ *désigne la classe fondamentale de* F. *La pente* $\mu(\mathrm{F})$ *est le nombre rationnel*

$$\mu(\mathrm{F}) = \frac{\chi(\mathrm{F})}{\deg(\mathrm{F})}.$$

Définition 63. — *Un faisceau algébrique cohérent* F *de dimension 1 est dit semi-stable (resp. stable) si* F *est pur, et pour tout sous-faisceau cohérent non nul* F′ *distinct de* F *on a*

$$\mu(\mathrm{F}') \leq \mu(\mathrm{F}) \quad \text{resp.} \ < .$$

Cette notion dépend de la polarisation. De plus, elle est invariante par tensorisation par H, mais elle n'est pas invariante par tensorisation par un fibré inversible quelconque.

Exemple

Considérons la quadrique $\mathrm{X} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, munie du faisceau $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1,1)$, une droite horizontale ℓ_1 et une droite verticale ℓ_2, et les faisceaux stables $\mathrm{F}' = \mathcal{O}_{\ell_1}$ et $\mathrm{F}'' = \mathcal{O}_{\ell_2}$. Alors il existe une extension non triviale

$$0 \longrightarrow \mathrm{F}' \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}'' \longrightarrow 0$$

En effet, $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}'', \mathrm{F}') = \mathbb{C}$. Le faisceau $\mathrm{F}(i)$ est de degré 3 pour la polarisation $\mathrm{L} = \mathcal{O}(1,2)$, est de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 2i + 2$, et le faisceau F′ est de degré 1, et de caractéristique d'Euler-Poincaré $i + 1$. Donc $\mu(\mathrm{F}') = 1$ et $\mu(\mathrm{F}) = \frac{2i+2}{3}$. Ainsi le faisceau F est instable si $i > -1$. Il est également instable si $i < -4$ car il existe un sous-faisceau de $\mathrm{F}''(i)$ de degré 1 et caractéristique $\chi = i$ au-dessus duquel l'extension ci-dessus se scinde. Par contre, $\mathrm{F}(i)$ est stable pour $i = -2$ et $i = -3$ et semi-stable pour $i = -4$ et $i = -1$. Par contre $\mathrm{F}(i)$ est semi-stable pour tout i pour la polarisation $\mathcal{O}(1,1)$.

On désigne par $\mathrm{M}(c, \chi)$ l'espace de modules [21] des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de classe fondamentale c et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ, et par $\mathrm{M}^s(c, \chi)$ l'ouvert des points stables. On sait que $\mathrm{M}(c, \chi)$ est une variété projective.

Proposition 64. — (i) *Si* ω_{X}^* *est ample, l'espace de modules* $\mathrm{M}^s(c, \chi)$ *est lisse de dimension* $c^2 + 1$.

(ii) *Si* X *est une surface K3,* $\mathrm{M}^s(c, \chi)$ *est lisse de dimension* $c^2 + 2$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que si F est stable, on a $\dim \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F}) = p_g$, ou ce qui revient au même, que l'application naturelle

$$\mathrm{H}^0(\omega_{\mathrm{X}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F}\otimes\omega_{\mathrm{X}})$$

est un isomorphisme. Soit r la multiplicité de F. Si F′ est l'image d'un morphisme non nul $f : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}\otimes\omega_{\mathrm{X}}$, on a si F′ est de multiplicité $r' < r$

$$\mu(\mathrm{F}) < \mu(\mathrm{F}') < \mu(\mathrm{F}) + \frac{\langle c', \omega_{\mathrm{X}}\rangle}{r'},$$

où c' et r' sont respectivement la classe fondamentale et la multiplicité de F′. D'après l'hypothèse $\langle c', \omega_{\mathrm{X}}\rangle \leq 0$, ce qui conduit à une contradiction. Ainsi, $f : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}\otimes\omega_{\mathrm{X}}$ est un isomorphisme ; il en résulte le morphisme f induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F}\otimes\omega_{\mathrm{X}}) \simeq \mathbb{C}$, et que $\langle c, \omega_{\mathrm{X}}\rangle = 0$. Dans l'hypothèse (i) c'est absurde, donc $\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F}\otimes\omega_{\mathrm{X}}) = 0$. Dans l'hypothèse (ii), le faisceau ω_{X} est trivial, et on a bien la conclusion. □

Corollaire 65. — *Sous les mêmes hypothèses, pour tout faisceau stable de classe fondamentale c on a $c^2 \geq -(1+p_g)$.*

Soit $\mathcal{C}(c)$ le schéma de Hilbert des courbes de X de classe fondamentale c. On a un morphisme $\mathrm{M}(c,\chi) \to \mathcal{C}(c)$ qui associe à un faisceau F le support schématique de F : c'est en effet une courbe de classe fondamentale c. La fibre au dessus d'un point représentant une courbe intègre C est la compactification $\overline{\mathrm{J}}_\chi(\mathrm{C})$ de la composante du groupe de Picard J(C) des fibrés inversibles de caractéristique d'Euler-Poincaré χ obtenue en considérant les faisceaux sans torsion de rang 1.

9.2. Courbes rationnelles sur les surfaces K3 [3]

On suppose dans ce paragraphe que X est une surface K3, de groupe de Picard $\mathbb{Z}$, munie d'une classe effective $c \in \mathrm{H}_2(\mathrm{X},\mathbb{Z})$ engendrant le groupe de Néron-Severi, et telle que

$$c^2 = 2g - 2.$$

Pour $g \geq 1$, le fibré inversible A associé à une telle courbe est alors engendré par ses sections, et on a $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}) = \mathrm{H}^2(\mathrm{A}) = 0$. De plus, toute courbe dans le système linéaire $|\mathrm{A}| = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{A}))$

est intègre. Le schéma de Hilbert $\mathcal{C}(c)$ des courbes de classe fondamentale c est le système linéaire complet $|\mathrm{A}|$, lequel est de dimension g d'après la formule de Riemann-Roch. Pour $g = 0$, il n'y qu'une courbe dans le système linéaire, et cette courbe est une courbe rationnelle lisse.

Lemme 66. — *Soit $\alpha \in \mathrm{H}_2(\mathrm{X}, \mathbb{Z})$ une classe de cohomologie entière. Dans le système linéaire $\mathcal{C}(\alpha)$ des courbes de classe fondamentale α, il n'y a qu'un nombre fini de courbes rationnelles.*

Démonstration. Supposons qu'il y ait une infinité de courbes rationnelles dans ce système linéaire ; considérons le fibré inversible associé L, dont la classe de Chern est la duale de Poincaré de α. On pourrait trouver une courbe projective lisse irréductible Γ et un morphisme $\Gamma \longrightarrow |\mathrm{L}|$ non constant $t \mapsto \mathrm{C}_t$, tel que pour t générique la courbe C_t soit rationnelle. La variété d'incidence Y des couples $(t, x) \in \Gamma \times \mathrm{X}$ tels que $x \in \mathrm{C}_t$ est une surface projective et après désingularisation, on obtient une surface lisse projective $\check{\mathrm{Y}}$ et des morphismes surjectifs

$$\begin{tikzcd} \check{\mathrm{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \\ \Gamma & \end{tikzcd}$$

Par le théorème de Bertini, le morphisme $\check{\mathrm{Y}} \longrightarrow \Gamma$ est lisse au-dessus d'un ouvert non vide U de Γ, et pour $t \in \mathrm{U}$, la fibre est la normalisée de la courbe C_t : c'est donc une courbe lisse et rationnelle, donc la surface $\check{\mathrm{Y}}$ est une surface réglée ([4], Chapitre 3). Mais alors $p_g(\check{\mathrm{Y}}) = 0$, ce qui entraîne évidemment $p_g(\mathrm{X}) = 0$. C'est absurde puisque X est une surface K3. □

Le problème étudié dans Yau et Zaslow [29] et Beauville [3] est de déterminer le nombre de courbes rationnelles dans le système linéaire $\mathcal{C}(c)$. Beauville introduit pour ceci le morphisme

$$\pi : \mathrm{M}(c, \chi) \longrightarrow \mathcal{C}(c)$$

considéré ci-dessus. L'espace de modules $\mathrm{M}(c, \chi)$ qui n'a que des points stables, et c'est donc est une variété projective lisse de dimension $c^2 + 2 = 2g$. La fibre au-dessus du point

représenté par la courbe C est isomorphe à la jacobienne compactifiée $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}$ des faisceaux sans torsion sur C de degré 0. Le lemme suivant permet de relier $e(\mathrm{M}(c,\chi))$ aux courbes rationnelles de $\mathcal{C}(c)$:

LEMME 67. — *Soit* C *une courbe intègre. Si* C *n'est pas rationnelle, on a* $e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}) = 0$

Démonstration. Il suffit de montrer que $e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C})$ est divisible par tout entier $n \geq 1$: on va montrer que $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}$ a un automorphisme d'ordre n sans point fixe. On considère l'action de la jacobienne JC des fibrés inversibles de degré 0 sur $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}$, par tensorisation. Si F est un faisceau sans torsion de rang 1 sur C, l'algèbre des endomorphismes $\mathcal{A} = \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{F})$ de F est une algèbre commutative intègre et de type fini et isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$ en dehors des points fixes ; il en résulte que c'est l'image du faisceau structure $\mathcal{O}_{\mathrm{C}'}$ d'une courbe intègre C′ par un morphisme fini $\pi : \mathrm{C}' \longrightarrow \mathrm{C}$ birationnel. Alors si $\mathrm{L} \in \mathrm{Pic}^0(\mathrm{C})$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{F}, \mathrm{F} \otimes \mathrm{L}) = \mathrm{H}^0(\mathcal{A} \otimes \mathrm{L}) = \mathrm{H}^0(\pi^*(\mathrm{L}))$$

Ainsi, si $\mathrm{F} = \mathrm{F} \otimes \mathrm{L}$, le fibré $\pi^*(\mathrm{L})$ est trivial. En particulier, l'image réciproque de L est triviale sur la normalisation de $\nu : \check{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}$. Ceci signifie que le stabilisateur de F est contenu dans le noyau du morphisme surjectif

$$\nu^* : \mathrm{JC} \longrightarrow \mathrm{J}\check{\mathrm{C}}$$

Le noyau est un groupe divisible, par conséquent ce morphisme a un scindage. Il en résulte qu'il existe des éléments d'ordre n qui n'appartiennent pas au noyau. Un tel élément opère sans point fixe sur $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}$. □

Désignons par $\mathcal{R}(c)$ l'ensemble des courbes rationnelles dans le système linéaire $\mathcal{C}(c)$. Considérons le morphisme $\mathrm{M}(c,\chi) \longrightarrow \mathcal{C}(c)$. La caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathrm{M}(c,\chi)$ est alors donnée par la formule suivante :

THÉORÈME 68. — *On a*

$$e(\mathrm{M}(c,\chi)) = \sum_{\mathrm{C} \in \mathcal{R}(c)} e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}).$$

Démonstration. Si X est une variété algébrique complexe, on désigne par $e(\mathrm{X})$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de X, définie par $e(\mathrm{X}) = \sum_q (-1)^q \dim \mathrm{H}^q_c(\mathrm{X}, \mathbb{Q})$. Si F est un fermé de X et U l'ouvert complémentaire, on a $e(\mathrm{X}) = e(\mathrm{U}) + e(\mathrm{F})$.

Considérons la projection $\mathrm{M} = \mathrm{M}(c, \chi) \longrightarrow \mathcal{C}(c)$; soit F l'image réciproque de $\mathcal{R}(c)$ et U l'ouvert complémentaire de l'image réciproque de $\mathcal{R}(c)$. La caractéristique d'Euler-Poincaré $e(\mathrm{M})$ est donnée par la somme

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathcal{R}(\mathrm{c})} e(\bar{\mathrm{J}}\mathrm{C}).$$

Il suffit en effet de vérifier que la caractéristique d'Euler-Poincaré $e(\mathrm{U})$ est nulle. Mais si $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est un morphisme propre de variétés algébriques, il existe une stratification de Y telle que au-dessus de chaque strate, ce morphisme est topologiquement localement trivial. Alors si les fibres sont de caractéristique d'Euler-Poincaré nulles, il en est de même de X. Par additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré, on obtient que $e(\mathrm{X}) = 0$. D'où l'énoncé. □

THÉORÈME 69. — *On a* $e(\mathrm{M}(c, 1)) = e(\mathrm{Hilb}^g(\mathrm{X})) = \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^g(\mathrm{X}), \mathbb{Q})$.

Ce nombre est donc fourni par la formule de Göttsche : en effet,

$$\begin{aligned}\sum_{g \geq 0} q^g \dim \mathrm{H}^*(\mathrm{Hilb}^g(\mathrm{X})) &= \prod_{m \geq 1} \frac{1}{(1 - q^m)^{24}} \\ &= 1 + 24q + 324q^2 + 3200q^3 + \ldots\end{aligned}$$

Compte-tenu des théorèmes et ci-dessus, ceci nous permet de préciser le nombre de courbes rationnelles C dans le système linéaire $\mathcal{C}(c)$, chacune d'elles étant comptée avec la multiplicité $e(\bar{\mathrm{J}}\mathrm{C})$.

Rappelons que $\mathrm{M}(c, \chi)$ est une variété projective lisse de dimension $2g$.

LEMME 70. — *Le fermé de* $\mathrm{M}(c, 1)$ *des* F *tels que* $h^0(\mathrm{F}) > 1$ *est de codimension* 2.

Ce lemme résulte par exemple de la correspondance de Lazarsfeld entre les faisceaux $\mathrm{F} \in \mathrm{M}(c, \chi)$ satisfaisant à la condition de Brill-Nother $h^1(\mathrm{F}) = r$ et les faisceaux stables de rang r sur X muni d'un sous-espace vectoriel de sections de dimension r :

Lemme 71. — *Soit* F *un faisceau de* $\mathrm{M}(c,\chi)$ *tel que* $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{F}) = r$. *Posons* $\Gamma = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$. *Considérons l'extension canonique*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\mathrm{X}(\Gamma^*) \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow 0$$

Alors

(i) *le faisceau* E *est un faisceau stable de rang* r *de classes de Chern* $(c, c_2 = \dfrac{c^2}{2} - \chi)$.

(ii) *On a* $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}) = \mathrm{H}^2(\mathrm{E}) = 0$, *et* $h^0(\mathrm{E}) = 2r + \chi$.

(iii) *Réciproquement, étant donné un faisceau stable de rang* r, *de classes de Chern* (c, c_2) *et un sous-espace vectoriel* $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{E})$ *de dimension* r *le conoyau* F *du morphisme d'évaluation est un faisceau* F *de dimension 1 de* $\mathrm{M}(c,\chi)$ *tels que* $h^0(\mathrm{F}) = r + \chi$.

Compte-tenu de la structure des espaces de modules de fibrés stables sur les surfaces K3 on obtient la conséquence suivante :

Corollaire 72. — *Le schéma des* $\mathrm{F} \in \mathrm{M}(c,\chi)$ *satisfaisant à la condition de Brill-Noether* $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{F}) = r$ *est une sous-variété localement fermée lisse de dimension* $2g - r(r+\chi)$.

En particulier, pour $\chi = 1$, le fermé des points tels que $h^0(\mathrm{F}) > 1$ est une sous-variété de codimension ≥ 2. Il en est de même des faisceaux F qui sont localement libres sur leur support. Considérons l'ouvert U de $\mathrm{M}(c,1)$ dont les points correspondent aux faisceaux F localement libre sur leur support et tels que $\mathrm{H}^0(\mathrm{C},\mathrm{F}) = 1$. Le schéma des zéros d'une section non nulle d'un tel faisceau F définit un sous-schéma de X de longueur g. On obtient ainsi un morphisme

$$\phi : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{Hilb}^g(\mathrm{X})$$

Réciproquement, étant donné un sous-schéma Z de X de longueur g, le morphisme $\mathrm{H}^0(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\mathrm{Z})$ a toujours un noyau, qui défini une courbe $\mathrm{C} \in \mathcal{C}(c)$ contenant Z.

Lemme 73. — *En dehors d'un fermé de codimension 2 de* $\mathrm{Hilb}^g(\mathrm{X})$, *on a*

$$\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{I}_\mathrm{Z}\mathrm{A}) = 1.$$

Démonstration. Les points Z tels que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{I}_\mathrm{Z}\mathrm{A}) \geq 2$ forment un fermé de codimension ≤ 2 puisqu'il s'agit d'une variété déterminantielle. On considère l'ensemble Σ des couples

$(\Gamma, Z) \in \mathrm{Grass}(1, |A|) \times \mathrm{Hilb}^g(X)$ formés d'un pinceau Γ de courbes de $|A|$ contenant Z. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathrm{Hilb}^g(X) \\ \mathrm{Grass}(1, |A|) & \end{tikzcd}$$

Les fibres de p_1 sont finies par conséquent $\dim \Sigma = 2(g-1)$. Par suite l'image de Σ dans $\mathrm{Hilb}^g(X)$ est de codimension ≥ 2.

Fin de la démonstration du théorème

Soit Z tels que $\dim H^0(I_Z A) = 1$, C la courbe de $|A|$ associée. Pour que Z soit le schéma des zéros d'une section non nulle d'un fibré inversible F sur C, il suffit de s'assurer que la courbe soit lisse aux points de Z. Le fibré F aura alors pour degré g, donc caractérisque d'Euler-Poincaré $\chi = 1$. Or, l'image dans $\mathrm{Hilb}^g(X)$ du fermé des couples (Z, C) formés d'un point Z de $\mathrm{Hilb}^g(X)$ et d'une courbe C tels que Z rencontre un point singulier de C est clairement de codimension 2 dans $\mathrm{Hilb}^g(X)$. Soit W désigne l'ouvert des $Z \in \mathrm{Hilb}^g(X)$ tels que $\dim H^0(I_Z(A)) = 1$, et tels que Z ne rencontre pas l'ensemble singulier de la courbe $C \in |A|$ associée. On a donc obtenu un morphisme

$$\psi : W \longrightarrow M(c, 1).$$

On a $\phi(U) \subset W$. En effet, si $Z \in \mathrm{Hilb}^g(X)$ est le point associé à $F \in U$, de support C, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{I}_Z(A) \longrightarrow \mathcal{I}_{C,Z}(A) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{I}_{C,Z}$ est l'idéal de C défini par le sous-schéma Z. Le dualisant ω_C est isomorphe à $A|_C$. On a $\mathcal{I}_{C,Z}(A) = \mathcal{O}_C(A \otimes F^*)$ de sorte que par dualité de Serre $H^0(A \otimes F^*) = H^1(F)$. L'hypothèse $\dim H^0(F) = 1$ est équivalente $H^1(F) = 0$. Par suite $\dim H^0(\mathcal{I}_Z A) = 1$. Réciproquement, par la construction inverse, on a aussi $\psi(W) \subset U$. Partant d'un point $Z \in \mathrm{Hilb}^g(X)$ tel que $\dim H^0(\mathcal{I}_Z(A)) = 1$, la même suite exacte montre que pour le faisceau F on a $H^1(F) = 0$, et par suite $\dim H^0(F) = 1$.

On a ainsi obtenu un isomorphisme $\phi : U \longrightarrow W$, d'inverse ψ. Or la variété $M(c, 1)$ est propre et lisse. De plus, c'est une variété symplectique : la forme symplectique est donnée

par le cup-produit

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F},\mathrm{F}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F},\mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F}) \simeq \mathrm{H}^2(\mathcal{O}_\mathrm{X}) = \mathbb{C}.$$

Il en est de même du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^g(\mathrm{X})$. Il suffit alors pour obtenir le théorème d'utiliser le résultat suivant dû à Huybrechts ([17], [18])(8)

THÉORÈME 74. — *Soient* X *et* Y *deux variétés projectives lisses munies d'une structure symplectique. On suppose qu'il existe des ouverts* $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ *et* $\mathrm{V} \subset \mathrm{Y}$ *dont le complémentaire est de codimension 2 et tels que* U *soit isomorphe à* V. *Alors les variétés* X *et* Y *sont difféomorphes. En particulier, elles ont les mêmes nombres de Betti.*

Remarque

C'est seulement pour s'assurer que le système linéaire $|\mathrm{A}|$ ne contient que des courbes intègres que nous avons pris pour c une classe qui engendre la groupe de Picard. Le théorème s'étend sans changement à n'importe quel système linéaire complet sur X, dès que l'on sait qu'il ne contient que des courbes intègres. Si l'on voulait étendre ceci au cas des systèmes linéaires complets quelconques, il conviendrait d'étudier la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'espace de modules $\mathrm{M}_\mathrm{C}(\chi)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de support schématique C, lorsque C est une courbe polarisée qui n'est plus obligatoirement intègre.

9.3. La jacobienne compactifiée d'une courbe rationnelle [3],[10]

Il reste à préciser ce qu'est la multiplicité $e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C})$ dans le cas d'une courbe rationnelle. D'après un résultat récent de Fantechi, Göttsche et Van Straten [10], c'est un nombre positif que nous allons décrire.

Considérons tout d'abord la variété $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_n)$ des morphismes de degré d. C'est une variété algébrique quasi-projective de dimension $(n+1)(d+1)-1$ qu'on peut décrire

(8) Dans [18], Huybrechts suppose que les variétés symplectiques sont irréductibles, ce qui signifie que l'espace vectoriel des 2−formes différentielles régulières est de dimension 1 ; ceci se vérifie facilement pour le schéma de Hilbert. Compte-tenu de l'hypothèse sur la codimension du complémentaire de l'ouvert W, on obtient que $\mathrm{M}(c,1)$ est aussi une variété symplectique irréductible. Cette remarque permet en fait d'éviter le calcul de la codimension de U. Dans [17], l'hypothèse sur les ouverts U et V est plus restrictive.

comme l'ouvert de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d))^{n+1})$ des sections qui ne s'annulent pas simultanément. On peut faire opérer $\mathrm{SL}(2)$ linéairement sur l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d))^{n+1}$. Le calcul des points stables à l'aide du critère numérique de Mumford est facile et donne le résultat suivant :

Lemme 75. — *L'ouvert des points stables sous l'action de* $\mathrm{SL}(2)$ *de* $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d))^{n+1})$ *correspond aux familles de sections* $s = (s_i)_{i=0}^n$ *qui ne s'annulent pas simultanément à l'ordre* $\dfrac{d}{2}$.

Il en résulte que l'ouvert invariant $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_n)$ est contenu dans l'ouvert des points stables ; il a donc un quotient géométrique $\mathrm{M}_{0,d}(\mathbb{P}_n)$ qui est une variété irréductible et normale de dimension $(n+1)(d+1)-4$. (L'indice 0 dans la notation correspond au genre 0). Pour $n = 1$, le quotient correspond aux classes d'isomorphisme de revêtements ramifiés $\phi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ de degré d ; c'est une variété quasi-projective de dimension $2d-2$.

Lemme 76. —

(i) *Les points de* $\mathrm{M}_{0,d}(\mathbb{P}_n)$ *correspondent aux couples* (C, ϕ) *formés d'une courbe rationnelle* $\mathrm{C} \subset \mathbb{P}_n$ *dont le degré* ℓ *divise* d, *et d'un revêtement ramifié* $\phi \in \mathrm{M}_{0,d/\ell}(\widetilde{\mathrm{C}})$ *de degré* $\frac{d}{\ell}$ *de la courbe normalisée* $\widetilde{\mathrm{C}}$ *de* C.

(ii) *L'ensemble des courbes rationnelles de degré* d *s'identifie un ouvert de Zariski* R_d *de* $\mathrm{M}_{0,d}(\mathbb{P}_n)$ *; au-dessus de cet ouvert, le stabilisateur d'un point est réduit à l'élément neutre.*

Démonstration. En effet, si $\Gamma \subset \mathbb{P}_n$ est l'image d'un morphisme f de degré d son image est une courbe projective intègre C dont la normalisée est une courbe lisse $\widetilde{\mathrm{C}}$ dominée par $\mathbb{P}_1$ donc isomorphe à $\mathbb{P}_1$. Il en résulte que le morphisme f se factorise suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{\mathrm{C}} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

où π est le morphisme de normalisation. Mais ceci implique que C est une courbe rationnelle de degré ℓ, où ℓ est un diviseur de d, et $\phi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{C}}$ un morphisme de degré d/ℓ. Ceci

prouve (i). En particulier, les points correspondant à $\ell = d$ correspondent à des courbes rationnelles de degré d de $\mathbb{P}_n$.

Pour (ii), on considère le morphisme universel au-dessus de $\mathrm{Mor} = \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_n)$, qu'on désigne par u :

$$u : \mathrm{Mor} \times \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathrm{Mor} \times \mathbb{P}_n$$

et le conoyau $\mathcal{Q}$ du morphisme de faisceaux sur $\mathrm{Mor} \times \mathbb{P}_n$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Mor}\times\mathbb{P}_n} \longrightarrow u_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Mor}\times\mathbb{P}_1})$$

Ce faisceau n'est pas plat sur Mor, mais ses images directes $\mathrm{R}^i\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{Q}(m))$ par pr_1 sont nulles pour $i \geq 1$ et $m \geq 0$. Il en résulte que la fibre au dessus d'un point $f \in \mathrm{Mor}$ du faisceau $\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{Q}(i))$ est l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{Q}_f(i))$. Le polynôme de Hilbert est de degré ≤ 1. Dire que f est birationnelle signifie que le support de $\mathcal{Q}_f$ est fini, ou encore que ce polynôme de Hilbert est de degré 0. Ceci définit un ouvert B_d dans Mor, invariant par l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_1)$ dont le quotient est exactement l'ouvert R_d des courbes rationnelles de degré d. $\square$

Remarque. Le complémentaire de l'ouvert R_d est de codimension $\geq \min(d-\ell)(n-1)$, où ℓ parcourt les diviseurs stricts de d.

Considérons en effet pour chaque diviseur $\ell < d$ de d le morphisme

$$\alpha_\ell : \mathrm{B}_\ell \times \mathrm{Mor}_{0,d/\ell}(\mathbb{P}_1) \longrightarrow \mathrm{M}_{0,d}(\mathbb{P}_n),$$

qui associe à $(\pi, [\phi])$ la classe du morphisme $f = \pi \circ \phi$. Les images des α_ℓ sont disjointes, et la réunion $\cup_{\ell' \leq \ell} \mathrm{Im}\, \alpha_{\ell'}$ est un fermé comme on le voit en remarquant que son image réciproque dans M correspond aux points $f \in \mathrm{M}$ pour lesquels le coefficient du terme dominant dans le le polynôme de Hilbert $i \mapsto \mathrm{H}^0(\mathcal{Q}_f(i))$ est $\geq d/\ell$. Il en résulte que l'image de α_ℓ est localement fermée dans $\mathrm{M}_{0,d}(\mathbb{P}_n)$. Le groupe des automorphismes $\mathrm{PGL}(2) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_1)$ opère librement sur l'ouvert R_ℓ, et donc sur le membre de gauche par $g.(\nu, [\phi]) = (\pi g^{-1}, [g\phi])$ pour $g \in \mathrm{PGL}(2)$. Les orbites sont exactement les fibres de ce morphisme. Il en résulte que l'on a

$$\dim \mathrm{Im}\, \alpha_\ell = (n+1)(\ell+1) + 2\frac{d}{\ell} - 6.$$

et par suite

$$\begin{aligned} \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, \alpha_\ell &= (n+1)(d-\ell) + 2 - \frac{2d}{\ell} \\ &= (d-\ell)(n-1+2(1-\frac{1}{\ell}) \\ &\geq (d-\ell)(n-1). \end{aligned}$$

Ce calcul ne sera pas utilisé dans la suite.

Corollaire 77. — *L'ouvert* $\mathrm{R}_d \subset \mathrm{M}_{0,d}(\mathbb{P}_n)$ *est lisse et son espace tangent de Zariski en un point* C *est le conoyau de l'application linéaire injective*

$$\mathrm{T}\pi : \mathrm{H}^0(\mathrm{T}\mathbb{P}_1) \longrightarrow \mathrm{H}^0(f^*(\mathrm{T}\mathbb{P}_n))$$

induite par un morphisme de normalisation $\pi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathrm{C} \subset \mathbb{P}_n$.

Considérons maintenant une variété projective X et $\beta \in \mathrm{H}_2(\mathrm{X}, \mathbb{Z})$ une classe d'homologie de degré 2. Il existe pour les classes d'équivalence de morphismes stables $\mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathrm{X}$ telles que $f_*([\mathbb{P}_1]) = \beta$ un espace de modules grossier $\mathrm{M}_{0,\beta}(\mathrm{X})$; c'est un schéma quasi-projectif. Pour le construire, il suffit de choisir un fibré très ample A sur X, de classe de Chern $c_1(\mathrm{A}) = h$ ce qui permet de réaliser X comme sous-schéma fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{A}))$. Le schéma $\mathrm{Mor}_\beta(\mathbb{P}_1, \mathrm{X})$ des morphismes de degré d tels que $f_*([\mathbb{P}_1]) = \beta$ est alors un sous-schéma fermé de la variété $\mathrm{Mor}_{0,d}(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_n)$ des morphismes $f : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_n$ de degré $d = \langle \beta, h \rangle$ qui se factorisent à travers X. Ce sous-schéma fermé est $\mathrm{SL}(2)-$invariant, et donc il a un quotient qui est l'espace de modules $\mathrm{M}_{0,\beta}(\mathrm{X})$ attendu. Ici encore, les points fermés de $\mathrm{M}_{0,\beta}(\mathrm{X})$ correspondent aux paires $(\mathrm{C}, [\phi])$ où C est une courbe rationnelle et $[\phi] \in \mathrm{M}_{0,\ell}(\widetilde{\mathrm{C}})$ la classe d'isomorphisme d'un revêtement ramifié dont le degré ℓ divisant d de la normalisation $\widetilde{\mathrm{C}}$ de C. Evidemment, pour une telle paire, la classe fondamentale [C] de la courbe rationnelle C divise β, puisque $\ell[\mathrm{C}] = \beta$.

Dans le cas où X est une surface K3, et où β est une classe primitive, on doit avoir obligatoirement $\ell = 1$. Il en résulte que l'espace de modules $\mathrm{M}_{0,\beta}(\mathrm{X})$ correspond aux courbes rationnelles C tracées sur X, de classe fondamentale β. Leur genre arithmétique est donné par $2g - 2 = \beta^2$. D'après le lemme , l'espace de modules $\mathrm{M}_{0,\beta}(\mathrm{X})$ est fini. En particulier si C est une courbe rationnelle de classe fondamentale c, on peut considérer la longueur $\lg_{\mathrm{C}}(\mathrm{M}_{0,c}(\mathrm{X}))$ du schéma $\mathrm{M}_{0,c}(\beta)$.

Théorème 78. — [10] *Soit* X *une surface* K3 *dont le groupe de Picard est cyclique ; soit* c *la classe duale de Poincaré du générateur positif de* NS(X). *Si* C *est une courbe rationnelle tracée sur* X, *de classe fondamentale* c, *on a*

$$e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}) = \lg_{\mathrm{C}}(\mathrm{M}_{0,c}(\mathrm{X}))$$

9.4. Interprétation de $e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C})$ en termes locaux [3]

Soit C une courbe rationnelle. Dans [3], Beauville explique comment calculer la multiplicité $e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C})$ dans la pratique, en fonction du type de singularités que présente la courbe.

Réduction au cas unibranche

Toutes les courbes considérées sont supposées intègres.

Définition 79. — *Une courbe algébrique* C *est dite unibranche si le morphisme de normalisation* $\widetilde{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}$ *est un homéomorphisme.*

Etant donnée une courbe C, le morphisme de normalisation $\pi : \widetilde{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}$ se factorise suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{C}} \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & \check{\mathrm{C}} \arrow[d] \\ & \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

où $\check{\mathrm{C}}$ est unibranche, et minimale.

Proposition 80. — *Soit* C *une courbe intègre. On a* $e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}) = e(\overline{\mathrm{J}}\check{\mathrm{C}})$.

Soit C une courbe intègre. Si C' est une courbe intègre et $f : \mathrm{C}' \longrightarrow \mathrm{C}$ un morphisme fini et birationnel, on dira que f est une normalisation partielle de C.

Lemme 81. — *Soit* $f : \mathrm{C}' \longrightarrow \mathrm{C}$ *une normalisation partielle de* C. *Le morphisme* $f_* : \overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}' \longrightarrow \overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}$ *est un plongement.*

On prouve que si F et G sont deux faisceaux cohérents sans torsion sur C' tels que les images directes sur C sont isomorphes, alors F est isomorphe à G. Si $f_*(\mathrm{F})$ et $f_*(\mathrm{G})$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}-$modules, il suffit de vérifier qu'un tel isomorphisme $\phi : f_*(\mathrm{F}) \longrightarrow f_*(\mathrm{G})$ est $f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{C}'})-$linéaire. Mais si λ est la multiplication par une section locale de $f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{C}})$ le morphisme $\phi\lambda - \lambda\phi$ s'annule en dehors des points singuliers de C. Puisque F est sans torsion, il est identiquement nul. Cet argument s'adapte aux familles. Puisque le morphisme f_* est propre, c'est un plongement fermé.

Démonstration de la proposition

En vertu du lemme , on peut supposer que C est rationnelle. Soit U le complémentaire de $\overline{\mathrm{J}}\check{\mathrm{C}}$ dans $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}$. On va montrer que $e(\mathrm{U}) = 0$ en trouvant un élément d'ordre n assez grand de JC qui opère librement sur U.

Soit Σ l'ensemble singulier de C, et $\widetilde{\Sigma}$ son image réciproque dans $\widetilde{\mathrm{C}}$. Puisque $\widetilde{\mathrm{C}}$ est rationnelle, on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^0(\pi_*(\mathcal{O}^*_{\widetilde{\mathrm{C}}})/\mathcal{O}^*_{\mathrm{C}}) \longrightarrow \mathrm{JC}.$$

Le noyau de l'épimorphisme $\rho : \mathrm{H}^0(\pi_*(\mathcal{O}^*_{\widetilde{\mathrm{C}}})/\mathcal{O}^*_{\mathrm{C}}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^*_{\widetilde{\Sigma}})/\mathrm{H}^0(\mathcal{O}^*_{\Sigma})$ est un groupe algébrique unipotent. Etant donné un entier $n \geq \#\widetilde{\Sigma}$, il existe alors élément $f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^*_{\widetilde{\Sigma}})/\mathrm{H}^0(\mathcal{O}^*_{\Sigma})$ qui prend des valeurs distinctes sur $\widetilde{\Sigma}$ et tel que $f^n = 1$. Cet élément se relève en un élément $g \in \mathrm{H}^0(\pi_*(\mathcal{O}^*_{\widetilde{\mathrm{C}}})/\mathcal{O}^*_{\mathrm{C}})$ tel que $g^n \in \ker\rho$. Puisque ce noyau est unipotent il existe un élément $h \in \ker\rho$ tel que $h^n = g$. Alors $k = g/h$ définit un élément qui sépare les points de Σ, et définit un fibré inversible L d'ordre n de JC.

Montrons que si $\mathrm{F} \in \mathrm{U}$, le faisceau $\mathrm{F} \otimes \mathrm{L}$ n'est pas isomorphe à F. Considérons comme dans le lemme la normalisation partielle $f : \mathrm{C}' \longrightarrow \mathrm{C}$ associée à F. Il s'agit de prouver que L n'appartient pas au noyau du morphisme image réciproque $\mathrm{JC} \longrightarrow \mathrm{JC}'$, c'est-à-dire que $f^*(\mathrm{L})$ n'est pas trivial. Remarquons d'abord que le morphisme $\widetilde{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}'$ n'est pas injectif : en effet, s'il l'était, le morphisme $\mathrm{C}' \longrightarrow \mathrm{C}$ devrait par minimalité se factoriser par $\check{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}$ et alors F serait un point de $\overline{\mathrm{J}}\check{\mathrm{C}}$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0(\pi_*(\mathcal{O}^*_{\widetilde{\mathrm{C}}})/\mathcal{O}^*_{\mathrm{C}}) & \longrightarrow & \mathrm{JC} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^0(\pi_*(\mathcal{O}^*_{\widetilde{\mathrm{C}}})/\mathcal{O}^*_{\mathrm{C}'}) & \longrightarrow & \mathrm{JC}'
\end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes. L'image de k dans $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}'$ n'est pas triviale. En effet, si k provenait d'une section locale de $\mathcal{O}_{\mathrm{C}'}$ au voisinage de l'image réciproque de Σ, la section k ne pourrait séparer les points de $\widetilde{\Sigma}$ du fait que le morphisme $\widetilde{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}$ n'est pas injectif. Ainsi, le fibré $f^*(\mathrm{L})$ n'est pas trivial. □

Pour une courbe C qui n'a que des points doubles ordinaires $\check{\mathrm{C}}$ est la normalisation : $\check{\mathrm{C}} = \mathbb{P}_1$. On obtient donc :

Corollaire 82. — *Si* C *n'a que des points doubles ordinaires,* $\chi(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}) = 1$.

Cas des courbes rationnelles unibranches

Soient C une courbe rationnelle, Σ l'ensemble singulier de C et $\pi : \widetilde{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}$ sa normalisation. Pour tout point singulier $x \in \Sigma$, $\delta_x = \dim(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}},x}/\mathcal{O}_{\mathrm{C},x})$. La somme $g = \sum_x \delta_x$ est le genre arithmétique de C.

Proposition 83. — *Soit* F *un faisceau cohérent sans torsion de degré* 0 *sur* C. *Il existe un sous-faisceau cohérent* G *de* $\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}})$ *et un seul isomorphe à* F *tel que pour tout* $x \in \Sigma$, *on ait*

$$\dim(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}},x}/\mathrm{G}_x) = \delta_x.$$

Démonstration.

Existence : Soit $\pi : \widetilde{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}$ la normalisation de C, et L le quotient de $\pi^*(\mathrm{F})$ par son sous-faisceau de torsion. C'est un faisceau inversible, et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow \pi_*(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{T}$ est un faisceau de torsion dont le support est contenu dans l'ensemble singulier de C. D'après Greuel-Pfister ([11], lemme 1.1) $\dim(\mathcal{T}_x) \leq \delta_x = \dim \mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}},x}$. Alors $\chi(\mathrm{L}) - \chi(\mathrm{F}) \leq g$ et par suite $\chi(\mathrm{L}) \leq 1$, et par suite L est de degré ≤ 0. Il en résulte que L se plonge dans $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}}$, et par suite F se plonge dans $\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}})$. Soit $n_x = \dim \mathcal{O}_{\mathrm{C},x}/\mathrm{F}_x$. Alors $\sum_x n_x = \sum_x \delta_x = g$. Soit s (resp. t) une section de $\mathcal{O}(\delta)$ de diviseur $\sum n_x x$, (resp. $\sum_x \delta_x x$). Alors la fonction rationnelle $\dfrac{t}{s}$ transporte F en un sous-faisceau de $\pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}})$ isomorphe à F, et satisfaisant aux propriétés requises.

Unicité : Soient F et F′ deux sous-$\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$−modules cohérents de $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}}$ satisfaisant à la propriété imposée. Supposons que F et F′ soient isomorphes, et considérons un isomorphisme $f : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}'$. Un tel isomorphisme se relève en un morphisme $\varphi : \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}'$ des fibrés de rang 1 associés sur $\widetilde{\mathrm{C}}$. Soient $s : \mathrm{L} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}}$ et $s' : \mathrm{L}' \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}}$ les sections associées. L'hypothèse entraîne que le diviseur associé à ces sections est le même. On a alors un

diagramme commutatif à homothétie près

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \pi_*(\mathrm{L}) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathrm{F}' \arrow[r] & \pi_*(\mathrm{L}') \arrow[r, "s'"] & \pi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}}})
\end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche composée est l'inclusion canonique. Par suite $\mathrm{F} = \mathrm{F}'$. □

Considérons la grassmannienne $\mathrm{G}_x = \mathrm{Grass}(\delta_x, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}},x})$ des sous-espaces vectoriels F de $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}},x}$ de codimension δ_x, tels que $\mathcal{O}_{\mathrm{C},x}\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$. On peut démontrer ([11], lemme 1.1) qu'un tel sous-module de $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathrm{C}},x}$ doit contenir l'idéal $\mathcal{O}_{\overline{\mathrm{C}},x}(-2\delta_x x)$ et donc G_x s'identifie un sous-schéma d'une grassmannienne de dimension finie. On a alors un homéomorphisme

$$\epsilon : \prod_x \mathrm{G}_x \longrightarrow \overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}$$

Corollaire 84. — *Soit* C *une courbe rationnelle, et* Σ *l'ensemble singulier de* C. *On a*

$$e(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}) = \prod_{x \in \Sigma} e(\mathrm{G}_x)$$

Ainsi, la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}$ se calcule en terme de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathrm{C},x}$. Il n'est pas clair que si x est un point singulier de C, la caractéristique d'Euler-Poincaré de G_x est positive. Ceci a aussi été prouvé par Fantechi, Göttsche et Van Straten [10].

Exemple

Considérons une courbe rationnelle présentant un cusp en x. On a $e(\mathrm{G}_x) = 2$. En effet, G_0 est isomorphe à $\mathbb{P}_1$: c'est en effet la grassmanienne des sous-espaces vectoriels F de dimension 1 de $\mathbb{C}[[t]]/(t^2)$ tels que $t^2\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$. Cette grassmanienne est donc isomorphe à $\mathbb{P}_1$.

Exemple

Le calcul a été mené à son terme par Beauville dans [3] pour les singularités simples. Il montre que $e(\mathrm{G}_x)$ est le nombre de classes d'isomorphisme de modules de rang 1 sans torsion sur $\mathcal{O}_{\mathrm{C},x}$. Si C est unibranche et a pour seule singularité une singularité simple, cette singularité est de l'un des types suivants :

— $\mathrm{A}_n : x^2 - y^{2\ell+1} = 0$, avec n pair ; on a alors $\chi(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}) = \ell + 1$

— $\mathrm{E}_6 : x^3 - y^4 = 0$; on a alors $\chi(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}) = 5$

— $\mathrm{E}_8 : x^3 - y^5 = 0$; on a alors $\chi(\overline{\mathrm{J}}\mathrm{C}) = 7$.

Compte-tenu de la réduction au cas unibranche, on peut calculer l'invariant $e(\mathrm{G}_x)$ pour toute singularité simple, quelles soient ou non unibranches.

Références

[1] G. Barthel, J.P. Brasselet, K.H. Fieseler, O. Gabber, L. Kaup, *Relèvement de cycles algébriques et homomorphismes associés en homologie d'intersection*, Ann. of Maths, 141 (1995) p. 147-179.

[2] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers,* Astérisque 100 (1983)

[3] A. Beauville, *Counting rational curves on K3 surfaces*, eprint alg-geom 9701019.

[4] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque 54 (1978).

[5] J. Briançon, *Description de* $\mathrm{Hilb}(\mathbb{C}\{x, y\})$, Inventiones math. 41 (1977) p. 45-89.

[6] W. Borho et R. MacPherson, *Partial resolutions of nilpotent varieties*, Astérisque 101-102 (1983).

[7] G. Ellingsrud et S.A. Strømme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. 87 (1987), p. 343-352.

[8] G. Ellingsrud et S.A. Strømme, *An intersection number for the punctual Hilbert scheme of a surface*, Trans. Amer. Math. Soc., à paraître.

[9] J. Fogarty, *Algebraic families on an algebraic surface,* Amer. J. Math 10 (1968) p. 511-521.

[10] B. Fantechi, L. Göttsche, D. Van Straten, *Euler number of the compactified Jacobian and multiplicity of curves*, e-print alg-geom 9708012.

[11] G.M. Greuel et G. Pfister, *Moduli spaces for torsion free modules on curve singularities*, J. Algebraic Geometry 2, p. 81-135 (1993)

[12] M. Goresky et R. MacPherson, *Intersection Homology* Topology 19 (1980) p. 135-162 ; *Intersection homology II*, Invent. Math. 72 (1983), p. 77-129.

[13] L. Göttsche et W. Soergel, *Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces*, Math. Ann. 296 (1993), 235-245.

[14] L. Göttsche, *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface,* Math. Annalen 286 (1990) p. 193-207.

[15] I. Grojnowski, *Instantons and affine algebras : The Hilbert scheme and vertex operators.* Math. Res. Letters 3 (1996) p. 275-291.

[16] H. Hironaka, *Triangulation of algebraic sets*, Proc. Symposium Pure Math. 29, Amer. Math. Soc. (1975) p. 165-185.

[17] D. Huybrechts, *Birational symplectic manifolds and their deformations*, J. Diff. Geom. 45 (1997) p. 488-513.

[18] D. Huybrechts, *Compact Hyperkähler Manifolds*, Habilitationsschrift, Universität-GH Essen.

[19] L. Illusie, *Catégories dérivées et dualité : travaux de J.L. Verdier*, Enseignement mathématique, (2) 36 (1990) p. 369-391.

[20] M. Lehn, *Chern Classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces*, Preprint Göttingen (1997)

[21] J. Le Potier, *Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif*, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, dédicacé à la mémoire de Constantin Bănică, 38 (1993) p. 635-678.

[22] D. Mumford, *Algebraic geometry I, Complex projective varieties*, Chapitre 3, Springer 1970.

[23] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Preliminary version, oct. 1996.

[24] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projectives surfaces*, Ann. of Maths 145 (1997) p. 379-388.

[25] H. Spanier, *Algebraic topology,* McGraw-Hill book company (1966).

[26] J.L. Verdier, *Classe d'homologie associée à un cycle*, Séminaire de géométrie analytique, exposé VI, Astérisque 36-37 (1976).

[27] J.L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard,* Invent. math. 36 (1976) p. 295-312.

[28] A. Weber, *A morphism of intersection homology induced by an algebraic map*, eprint alg-geom 9712032.

[29] S.T. Yau et E. Zaslow, *BPS states, string duality, and nodal curves on* K3, Nuclear physics B 471 (1996) p. 503-512.