L'espace de modules de Simpson

J. Le Potier (*)

Le but de cet exposé est de prouver que la famille des faisceaux semi-stables de dimension d, de polynôme de Hilbert fixé P sur une variété projective polarisée X est limitée, et de donner la construction de l'espace de modules $\mathrm{M_X(P)}$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables sur X de polynôme de Hilbert P. Ces résultats sont dûs à Simpson. Cette construction fournit bien entendu comme cas particuliers les espaces de modules de Mumford et Seshadri sur les courbes, de Gieseker sur les surfaces, de Maruyama sur les variétés projectives lisses de dimension supérieure. Mais même dans ces derniers cas, la construction de Simpson est beaucoup plus naturelle. En outre, elle fournit un espace de modules pour les classes d'équivalence de faisceaux algébriques cohérents semi-stables sur des variétés projectives singulières, même non réduites.

Comme d'habitude, cet espace de modules s'obtient comme quotient de l'ouvert des points semi-stables d'un schéma de Hilbert par l'action d'un groupe réductif, et il s'agit d'identifier ces points semi-stables ; la grande nouveauté par rapport aux constructions antérieures provient du choix de la polarisation sur le schéma de Hilbert. La polarisation que choisit Simpson n'est autre que celle qui est fournie par Grothendieck quand il construit ces schémas de Hilbert comme sous-variétés fermées d'une grassmannienne.

1. Les principaux énoncés

1.1. Semi-stabilité

On rappelle ici les notions de stabilité et semi-stabilité [13] pour les faisceaux algébriques cohérents de dimension d, c'est-à-dire dont le support est de dimension d. Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X}(1))$ une variété projective irréductible lisse polarisée. Selon l'usage, on désigne par K(X) le groupe de Grothendieck des classes de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules cohérents ; il est équipé de la forme quadratique entière $u \mapsto \chi(u^2)$, dont la forme polaire associée est notée $< \, , \, >$. Si F est un faisceau algébrique cohérent sur X, on désigne par $\mathrm{P_F}$ le polynôme de Hilbert de F. Si Y est une section hyperplane, on désigne par h la classe de $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$, de sorte que $< \mathrm{F}, h^i >$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la restriction

(*) Séminaire de géométrie algébrique, Jussieu, exposé du 27 février 1992.

de F à une intersection complète générale de i sections hyperplanes. Le polynôme de Hilbert de X est donné par la formule

$$\mathrm{P_F}(m) =< \mathrm{F}, (1-h)^{-m} >= \sum_{d \geq i \geq 0} \mathrm{C}^i_{m+i-1} < \mathrm{F}, h^i >$$

Définition 1.1. — *On appelle multiplicité de* F *le nombre entier* r *, qu'on notera aussi* mult(F)*, défini par*

$$r = \mathrm{mult(F)} =< \mathrm{F}, h^d >$$

Exemples : 1) Si le faisceau F est sans torsion on désigne par rg (F) le rang de F. On a alors $r = \mathrm{rg}\,(\mathrm{F}) \times$ degré (X).

2) Si le faisceau F est de dimension $n-1$, la multiplicité r est aussi le degré de la variété de Fitting de F.

3) La sous-variété définie par l'annulateur de F est de degré $\leq r^2$

Définition 1.2. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de dimension* d*, de polynôme de Hilbert* P *et de multiplicité* r *. On appelle pente de* F *le nombre rationnel*

$$\mu := \frac{< \mathrm{F}, h^{d-1} >}{r}$$

et polynôme de Hilbert réduit le polynôme

$$p_{\mathrm{F}} := \frac{\mathrm{P}}{r}$$

Le polynôme de Hilbert de F s'écrit donc

$$p_{\mathrm{F}}(m) = \mathrm{C}^d_{m+d-1} + \mu\ \mathrm{C}^{d-1}_{m+d-2} + \text{polynôme de degré } \leq d-2$$

Définition 1.3. — *(Pureté)*

Un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-module cohérent* F *de dimension* d *est dit pur de dimension* d *s'il n'a pas de sous-module cohérent non nul de dimension* $< d$*.*

Remarque 1.4. — Cette condition signifie que tous les points associés à F sont de dimension d ; elle équivaut à la condition suivante : pour tout point $x \in$ Supp F de hauteur $> n-d$, on a prof $\mathrm{F}_x \geq 1$. Comme dim $\mathrm{F}_x = \mathrm{ht}\,(x) - (n-d)$ on voit que si F est pur de dimension d, le localisé F_x est de Cohen-Macauley en tout point x de hauteur $n-d+1$, et que le fermé des point $x \in \mathrm{X}$ où F_x n'est pas de Cohen-Macaulay est de dimension $\leq d-2$.

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels ; on écrit $P \leq Q$ si $P(m) \leq Q(m)$ pour m assez grand (par valeurs positives). Autrement dit, les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique, en commençant par les termes de plus haut degré.

Définition 1.5. — *(Semi-stabilité)*
Soit F *un* $\mathcal{O}_X$*-module cohérent de dimension* d*, de multiplicité* r *et polynôme de Hilbert réduit* p*. On dit que* F *est semi-stable si*
a) *il est pur de dimension* d
b) *pour tout sous-module cohérent non nul* $F' \subset F$ *de polynôme de Hilbert réduit* p' *on a* $p' \leq p$.

On définit de même la *stabilité* , en demandant l'inégalité stricte lorsque F' est de multiplicité $r' < r$, et les notions de *μ-stabilité* et *μ-semi-stabilité* en remplaçant le polynôme de Hilbert par la pente. Comme dans le cas des faisceaux sans torsion, on a évidemment les implications suivantes

$$\begin{array}{ccc} \mu-\text{stable} & \Rightarrow & \text{stable} \\ & & \Downarrow \\ \mu-\text{semi}-\text{stable} & \Leftarrow & \text{semi}-\text{stable} \end{array}$$

1.2. Filtrations de Harder-Narasimhan

Lemme 1.6. —*(Grothendieck [3]) Soit* F *un* $\mathcal{O}_X$*-module cohérent pur de dimension* d*. Alors*
(1) *la pente des sous-modules cohérents non nuls* $F' \subset F$ *est majorée.*
(2) *la famille des sous-modules* $F' \subset F$*, de pente fixée, et dont le quotient* F/F' *est pur de dimension* d *est limitée.*

Proposition 1.7. — *Soit* F *un* $\mathcal{O}_X$*-module cohérent, pur de dimension* d*. Alors* F *a une filtration croissante par des sous-modules cohérent* $(F_i)_{i=1,\ldots,l}$ *dont le gradué* $gr_i = F_i/F_{i-1}$ *satisfait aux conditions suivantes*
(1) *le gradué* gr_i *est semi-stable ;*
(2) $p_{gr_i} > p_{gr_{i+1}}$ *pour* $i = 1, \ldots, l$.
Cette filtration est unique.

Comme dans le cas classique des faisceaux sans torsion, cet énoncé est une conséquence facile du lemme de Grothendieck. La filtration ainsi obtenue s'appelle la filtration de Harder-Narasimhan de F, et le gradué associé le gradué de Harder-Narasimhan. Pour un module cohérent pur de dimension

d on peut en particulier parler de p_{max} et p_{min} : il s'agit du polynôme de Hilbert réduit du premier et dernier terme respectivement du gradué de Harder-Narasimhan. De même, on peut pour un tel faisceau définir μ_{max} et μ_{min}.

Théorème 1.8. — *Soit* P *un polynôme de degré d. La famille des faisceaux μ-semi-stables de dimension d, de polynôme de Hilbert* $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$ *est limitée.*

En fait nous aurons besoin d'une version un peu plus générale de cet énoncé.

Théorème 1.9. — *Soient* P *un polynôme de degré d, et* C *une constante. La famille des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$−modules cohérents purs de dimension d, de polynôme de Hilbert* $\mathrm{P_F} = \mathrm{P}$*, et tels que* $\mu_{max}(\mathrm{F}) \leq \mathrm{C}$*, est limitée.*

La démonstration que nous donnons ici est proche de celle qui est proposée par C. Simpson. Dans le cas où $d = n$, c'est un résultat de Maruyama [10] , auquel nous allons nous ramener.

Démonstration. On peut évidemment supposer que la variété X est l'espace projectif $\mathbf{P}_n$. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents F purs de dimension d, de polynôme de Hilbert P et satisfaisant à la condition de l'énoncé :

$$\mu_{max}(\mathrm{F}) \leq \mathrm{C} \qquad (*)$$

Il suffit de montrer que la famille $\mathscr{F}_{\mathrm{Y}} \subset \mathscr{F}$ des faisceaux cohérents de $\mathscr{F}$ dont le support ne rencontre pas un sous-espace linéaire $\mathrm{Y} = \mathbf{P}_{n-d-1}$ fixé est limitée. En effet, le groupe projectif opère sur $\mathscr{F}$ et toute orbite rencontre $\mathscr{F}_{\mathrm{Y}}$. On peut alors considérer la projection $\pi : \mathbf{P}_n - \mathrm{Y} \to \mathbf{P}_d$ de centre Y sur un sous-espace linéaire $\mathbf{P}_d$ qui ne rencontre pas Y. Puisque F est à support propre dans $\mathbf{P}_n - \mathrm{Y}$, le faisceau cohérent $\mathrm{G} = \pi_*(\mathrm{F})$ est un faisceau cohérent sans torsion sur l'espace projectif $\mathbf{P}_d$ et son polynôme de Hilbert est encore P. On va montrer que ce module satisfait encore à la condition $(*)$, quitte à changer éventuellement la constante C. D'après Maruyama [10] , ceci suffira pour vérifier que la famille de faisceaux G est limitée.

Lemme 1.10. — *Il existe une constante* C′ *telle que pour tout faisceau* F *de* $\mathscr{F}_{\mathrm{Y}}$ *on ait*

$$\mu_{max}(\mathrm{G}) \leq \mathrm{C}'$$

Désignons par S la sous-variété de $\mathbf{P}_n$ définie par l'annulateur de F. La projection sur $\mathbf{P}_d$ notée encore $\pi : \mathrm{S} \to \mathbf{P}_d$ est un morphisme fini, et l'on a $\pi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_d}(1)) = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(1)$. En général ce morphisme n'est pas plat : c'est ici la principale difficulté de la démonstration. Cependant on a le lemme suivant :

Lemme 1.11. — *La sous-variété* S *définie par l'annulateur de* F *est pure de dimension d.*

Démonstration. Ceci signifie que le faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est pur de dimension d. Le faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est isomorphe à un sous-faisceau du faisceau des homomorphismes $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F},\mathrm{F})$. Il suffit donc de vérifier que ce dernier est pur de dimension d. Si on choisit un morphisme surjectif $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_n}(-i)^{\mathrm{N}} \to \mathrm{F}$ on obtient que le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F},\mathrm{F})$ s'identifie à un sous-module de $\mathrm{F}(i)^{\mathrm{N}}$; donc il est pur de dimension d. □

D'après la remarque 1.4 ceci a pour conséquence que la variété S est de Cohen-Macaulay en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2 dans S. En particulier, d'après par exemple Fulton [1] , lemma A.7.1, la projection $\pi : \mathrm{S} \to \mathbf{P}_d$ est un morphisme plat en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2 dans S. Par suite, on peut trouver un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathbf{P}_d$ dont le complémentaire est de codimension ≥ 2, et au-dessus duquel la projection π est plate.

Considérons l'algèbre $\mathscr{A} = \pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$. C'est un module cohérent sans torsion sur $\mathbf{P}_d$. On peut donc introduire les nombres rationnels $\mu_{min}(\mathscr{A})$ et $\mu_{max}(\mathscr{A})$. D'autre part, il y a correspondance bijective entre l'ensemble des sous-modules cohérents de F et l'ensemble des sous-$\mathscr{A}$−modules cohérents de G; cette correspondance est obtenue par image directe et donc conserve le polynôme de Hilbert.

Démonstration du lemme 1.10. Soit G_1 le premier terme de la filtration de Harder-Narasimhan de G ; par définition c'est un sous-module semi-stable de G tel que $\mu(\mathrm{G}_1) = \mu_{max}(\mathrm{G})$. Alors l'image G_1' du morphisme canonique $\mathrm{G}_1 \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}_d}} \mathscr{A} \to \mathrm{G}$ est un sous-$\mathscr{A}$-module de G qui est donc l'image directe par π d'un sous-module F_1 de F. Le module F_1 a même pente que G_1', et l'hypothèse du lemme entraîne que $\mu(\mathrm{G}_1') \leq \mathrm{C}$. Considérons le faisceau cohérent sans torsion défini par

$$\mathrm{G}_1 \overline{\otimes} \mathscr{A} := \mathrm{G}_1 \otimes \mathscr{A}/\mathrm{Torsion}$$

quotient du produit tensoriel $\mathrm{G}_1 \otimes \mathscr{A}$ sur l'algèbre $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_d}$ par son sous-module de torsion. Puisque G_1' est un quotient de $\mathrm{G}_1 \overline{\otimes} \mathscr{A}$ on a les majorations

$\mu_{min}(\mathrm{G}_1\overline{\otimes}\mathscr{A}) \leq \mu(\mathrm{G}_1') \leq \mathrm{C}$. Maintenant le faisceau G_1 étant semi-stable, on a d'après Maruyama [9]

$$\mu_{min}(\mathrm{G}_1\overline{\otimes}\mathscr{A}) = \mu(\mathrm{G}_1) + \mu_{min}(\mathscr{A}) + 1.$$

On obtient donc $\mu(\mathrm{G}_1) \leq \mathrm{C} - \mu_{min}(\mathscr{A})$. On est ramené à montrer le lemme suivant :

Lemme 1.12. — *Le nombre $\mu_{min}(\mathscr{A})$ est minoré par une constante ne dépendant que de la multiplicité r de* F *et de n et d.*

Démonstration. On sait que les familles de sous-schémas de $\mathbf{P}_{n-d}$ de dimension 0 et de longueur r' paramétrées par une variété S constituent un foncteur représentable par une variété projective $\mathbf{Hilb}^{r'}(\mathbf{P}_{n-d})$. Posons

$$\mathbf{H} = \coprod_{r' \leq r^2} \mathbf{Hilb}^{r'}(\mathbf{P}_{n-d})$$

et désignons par $\mathrm{Z} \subset \mathbf{H} \times \mathbf{P}_{n-d}$ le sous-schéma universel. Considérons le diagramme standard

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} \times \mathbf{P}_{n-d} & \xrightarrow{p} & \mathbf{P}_{n-d} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ \mathbf{H} & & \end{array}$$

Pour tout entier m, le faisceau $q_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}(m))$ est cohérent, et le morphisme q étant fini et plat, l'image directe commute aux changements de base. On peut alors, d'après le théorème B relatif appliqué au faisceau $\mathscr{J}_{\mathrm{Z}}(m)$, où $\mathscr{J}_{\mathrm{Z}}$ est l'idéal de Z, trouver un entier m tel que que le morphisme canonique obtenu par image directe

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{n-d}}(m)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{H}} \to q_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}(m))$$

soit surjectif : il suffit de le choisir assez grand. Le plus petit des entiers m possibles ne dépend évidemment que de n, d, r. Sur l'ouvert U de $\mathbf{P}_d$ au-dessus duquel π est plat, le schéma S est l'image réciproque de Z par un morphisme $\rho : \mathrm{U} \to \mathbf{H}$ d'après la propriété universelle de $\mathbf{H}$. Le théorème de changement de base montre que $\pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(m)|_{\mathrm{U}} = \rho^*(q_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}(m)))$. Compte-tenu de la formule de projection, on a l'identification $\pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(m)) = \mathscr{A}(m)$ et par conséquent, le faisceau $\mathscr{A}(m)|_{\mathrm{U}}$ est le quotient d'un faisceau trivial.

Puisque le complémentaire de U est de codimension 2, ceci suffit pour voir que

$$\mu_{min}(\mathscr{A}(m)) \geq 0.$$

Ainsi $\mu_{min}(\mathscr{A}) \geq -m$. □

Fin de la démonstration du théorème 1.9. On vient de démontrer que la famille des faisceaux G ainsi construite est limitée. Il reste à montrer que la famille des faisceaux F est limitée. La difficulté qui reste à surmonter est qu'on ne sait toujours pas que la famille de faisceaux $\mathscr{A}$ est limitée. Notons que l'ouvert $\mathbf{P}_n - \mathrm{Y}$ est isomorphe au fibré normal N de $\mathbf{P}_d$ dans $\mathbf{P}_n$ et que dans cette identification, la projection $\pi : \mathbf{P}_n - \mathrm{Y} \to \mathbf{P}_d$ devient la projection canonique $\mathrm{N} \to \mathbf{P}_d$, qu'on notera encore π. L'algèbre $\mathscr{A}$ est évidemment une algèbre quotient de l'algèbre $\mathscr{B} = \pi_*(\mathscr{O}_\mathrm{N}) = \oplus_i Sym^i \mathrm{N}^*$. La donnée de F dans la famille $\mathscr{F}_\mathrm{Y}$ équivaut à celle d'un faisceau cohérent sur N à support propre sur $\mathbf{P}_d$. Une telle donnée est équivalente à celle du faisceau cohérent image directe $\mathrm{G} = \pi_*(\mathrm{F})$ et d'un morphisme d'algèbres $\mathscr{B} \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{G})$ (*cf.* [4] , exercice 5.17). Un tel morphisme d'algèbres est déterminé par un morphisme $\mathrm{N}^* \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{G})$ de faisceaux algébriques cohérents sur $\mathbf{P}_d$ satisfaisant à certaines conditions évidentes de commutation ; ces conditions de commutation définissent une sous-variété de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Hom}(\mathrm{N}^*, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}))$, comme image réciproque de 0 par le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{N}^*, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{G})) \to \mathrm{Hom}(\wedge^2 \mathrm{N}^*, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}))$$

défini de la manière suivante : on associe au morphisme $f : \mathrm{N}^* \to \mathrm{Hom}(\mathrm{G}, \mathrm{G})$ le morphisme $\wedge^2 \mathrm{N}^* \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{G}))$ défini par $u \wedge v \mapsto [f(u), f(v)]$, ou u et v sont des sections locales de N^*. Par suite, la famille $\mathscr{F}_\mathrm{Y}$ est limitée. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque 1.13. — L'algèbre $\mathscr{A}$ s'obtient comme image du morphisme d'algèbres $\mathscr{B} \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{G})$. Pour la famille de faisceaux cohérents $\mathscr{A}$ on a donc seulement un nombre fini de polynômes de Hilbert possibles, et il en est de même pour la famille des sous-variétés S considérée. Il résulte du lemme 1.11 que la famille $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ est une famille de faisceaux purs de dimension d qui satisfait aux conditions du théorème 1.8 : ainsi la famille des sous-variétés S est limitée. C'est ce qui est affirmé dans [6] , mais l'argument invoqué n'est pas suffisant : j'ignore si le théorème de Chow reste vrai pour une famille de sous-variétés pures de dimension d de degré $\leq r$ dans $\mathbf{P}_n$ qui ne sont pas forcément réduites.

1.3. L'espace des modules $\mathrm{M_X(P)}$

Fixons un polynôme p de degré d, et considérons la catégorie $\mathscr{C}(p)$ des faisceaux semi-stables F de polynôme de Hilbert réduit p. Il est facile de vérifier qu'on obtient ainsi une catégorie abélienne ; en plus elle est évidemment noethérienne et artinienne, ce qui permet de définir dans cette catégorie la notion de filtration de Jordan-Hölder : on entend par là une filtration

$$0 \subset \mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2 \subset \cdots \subset \mathrm{F}_k = \mathrm{F}$$

telle que le gradué $gr_i(\mathrm{F}) = \mathrm{F}_i/\mathrm{F}_{i-1}$ soit stable ; le gradué $gr(\mathrm{F}) = \oplus gr_i(\mathrm{F})$ est alors bien défini à isomorphisme près. Deux faisceaux semi-stables F et G de $\mathscr{C}(p)$ sont dit S-équivalent si les gradués de Jordan-Hölder $gr(\mathrm{F})$ et $gr(\mathrm{G})$ sont isomorphes.

Soit P un polynôme de degré d. Une famille de faisceaux semi-stables sur X paramétrée par une variété algébrique S est un faisceau algébrique cohérent F sur $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$, plat sur S tel que pour tout point fermé $s \in \mathrm{S}$ le faisceau $\mathrm{F}(s)$ soit semi-stable. Pour une telle famille, le polynôme de Hilbert $\mathrm{P}_{\mathrm{F}(s)}$ est localement constant. On considère le foncteur $\underline{\mathrm{M}}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$ qui associe à la variété algébrique S l'ensemble $\underline{\mathrm{M}}_\mathrm{X}(\mathrm{P})(\mathrm{S})$ des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux semi-stables sur X, paramétrées par S, et de polynôme de Hilbert P.

Théorème 1.14. — *Il existe pour le foncteur* $\underline{\mathrm{M}}_\mathrm{X}(\mathrm{P})$ *un espace de modules grossier* $\mathrm{M_X(P)}$. *Cet espace de modules a les propriétés suivantes :*

1. *La variété algébrique* $\mathrm{M_X(P)}$ *est projective.*
2. *Les points de* $\mathrm{M_X(P)}$ *sont les classes de* S*−équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert* P.
3. *L'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux stables s'identifie à un ouvert de la variété* $\mathrm{M_X(P)}$.

La propriété de module grossier de $\mathrm{M_X(P)}$ signifie qu'il existe un morphisme fonctoriel $f : \underline{\mathrm{M}}_\mathrm{X}(\mathrm{P})(\mathrm{S}) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathrm{M_X(P)})$ satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute autre variété algébrique M', et tout morphisme fonctoriel $g : \underline{\mathrm{M}}_\mathrm{X}(\mathrm{P})(\mathrm{S}) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathrm{M}')$ il existe un morphisme et un seul $\varphi : \underline{\mathrm{M}}_\mathrm{X}(\mathrm{P}) \to \mathrm{M}'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{M}}_\mathrm{X}(\mathrm{P})(\mathrm{S}) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathrm{M_X(P)}) \\ & {}_{g}\searrow & \downarrow \varphi \\ & & \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathrm{M}') \end{array}$$

Evidemment, cette propriété caractérise la variété $\mathrm{M_X(P)}$. Cet énoncé est démontré avec cette généralité par C. Simpson [13] ; il étend les énoncés bien connus de Gieseker ([2]) et Maruyama ([8]) .

Un exemple

Supposons que X soit une surface projective lisse et polarisée, et que P soit de degré 1. Désignons par r la multiplicité et par χ la caractéristique d'Euler-Poincaré. On a donc $\mathrm{P}(m) = rm + \chi$. Considérons le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}_{\mathrm{X}}(r)$ des courbes de degré r tracées sur la surface X. On a alors un morphisme

$$\mathrm{M_X(P)} \to \mathbf{Hilb}_{\mathrm{X}}(r)$$

qui associe à la classe de S−équivalence du faisceau F la courbe définie par l'idéal de Fitting de F. Au-dessus d'un point correspondant à une courbe intègre de $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, la fibre de ce morphisme s'identifie à la variété des $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-modules cohérents L sans torsion, de rang un et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ. En particulier, au-dessus d'un point représentant une courbe lisse Y, on obtient comme fibre la composante $\mathrm{Pic}_{\chi}(\mathrm{Y})$ du groupe de Picard des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles de caractéristique d'Euler-Poincaré χ.

2. Critère de semi-stabilité

La démonstration du théorème 1.14 repose sur un critère permettant de décrire la semi-stabilité en termes de sections, et sur un énoncé qui permet de reconnaître pour un faisceau semi-stable donné les sous-faisceaux cohérents de même polynôme de Hilbert réduit ; ces énoncés sont implicites dans l'article de Simpson. Soit P un polynôme de degré d, de terme dominant $r\frac{m^d}{d!}$. Pour tout entier m, on considère l'ensemble $\mathrm{S}_m(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphisme de faisceaux F purs de polynôme de Hilbert P et qui satisfont aux conditions suivantes

(i) $\mathrm{P}(m) \leq h^0(\mathrm{F}(m))$

(ii) Pour tout sous-module cohérent non nul $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ de multiplicité r', on a

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r}$$

Considérons d'autre part l'ensemble $\mathrm{S}^*_m(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphisme de faisceaux purs F de polynôme de Hilbert P qui satisfont à la propriété en quelque sorte duale :

(ii)* Pour tout module cohérent quotient $\mathrm{F} \to \mathrm{F}''$ pur de dimension d et de multiplicité r'', on a

$$\frac{\mathrm{P}(m)}{r} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}''(m))}{r''}.$$

Il est clair que pour tout m, on a $\mathrm{S}_m(\mathrm{P}) \subset \mathrm{S}^*_m(\mathrm{P})$. Pour m assez grand, on peut dire beaucoup plus :

Proposition 2.1. — *(Critère de semi-stabilité)*
Le polynôme P *étant fixé, il existe un nombre* a *tel que pour tout* $m \geq a$ *les ensembles* $\mathrm{S}_m(\mathrm{P})$ *et* $\mathrm{S}^*_m(\mathrm{P})$ *coïncident avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert* P.

Remarque 2.2. — On peut se demander s'il ne serait pas plus naturel d'introduire simplement l'ensemble $\mathrm{S}'_m(\mathrm{P})$ des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents purs de polynôme de Hilbert P qui satisfont seulement à la condition (ii) Si $d = 1$, la condition (i) est effectivement automatique et on a alors $\mathrm{S}'_m \subset \mathrm{S}^*_m$. Par contre, en dimension supérieure cette condition n'entraîne pas la semi-stabilité, même en choisissant m très grand.

Considérons par exemple l'idéal I_m défini par m^4 points en position générale dans le plan projectif $\mathrm{X} = \mathbf{P}_2$. Le faisceau sans torsion $\mathrm{F}_m = \mathrm{I}_m(m^2) \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(-m^2)$ est de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = c_2 = 0$, donc de polynôme de Hilbert fixé P. Il satisfait à la propriété 2 dès que $m \geq 4$; en effet, on a alors

$$h^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(m^2 + m)) \leq m^4.$$

Puisque les points sont choisis en position générale, ceci entraîne $h^0(\mathrm{I}_m(m^2 + m)) = 0$, et par suite $h^0(\mathrm{F}_m(m)) = 0$. Ainsi, la condition 2. est trivialement satisfaite bien que le faisceau F_m soit instable. Bien sûr, la condition 2* n'est pas satisfaite pour F_m puisque $\mathrm{P}(m) = m^2 + 3m + 2$.

Venons-en à la description des filtrations de Jordan-Hölder. Etant donné un faisceau semi-stable F de dimension d et de multiplicité r et un entier m, désignons par $\mathrm{Max}_m(\mathrm{F})$ l'ensemble des sous-faisceaux cohérents $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ non nuls de multiplicité r' satisfaisant à la condition suivante :

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} = \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r}$$

Proposition 2.3. — *Soit* P *un polynôme de degré* d. *Il existe un nombre* a *tel que pour tout* $m \geq a$ *et tout faisceau semi-stable* F *de polynôme de Hilbert* P *l'ensemble* $\mathrm{Max}_m(\mathrm{F})$ *coïncide avec l'ensemble des sous-faisceaux cohérents* $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ *ayant même polynôme de Hilbert réduit que* F.

La démonstration de ces deux énoncés fait intervenir bien sûr de façon essentielle le théorème B de Serre, une fois acquis le fait que certaines familles de faisceaux et de sous-faisceaux sont limitées. C'est le cas par exemple de la famille $\cup_m \mathrm{S}^*_{m\geq a}(\mathrm{P})$, pourvu que a ait été choisi assez grand. Pour obtenir cette information on utilise le théorème 1.9 et l'estimation suivante, qui majore le nombre de sections indépendantes d'un faisceau semi-stable, en fonction de la multiplicité et de la pente, même si le polynôme de Hilbert n'est pas fixé.

Une estimation

Lemme 2.4. — *Soit r un entier > 0. Il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que pour tout $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-module μ-semi-stable F de dimension d de multiplicité r et de pente μ on ait*

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \frac{1}{d!}\,([\mu + \mathrm{C}]_+)^d$$

où, pour tout réel ν , $[\nu]_+ = sup(\nu, 0)$.

Démonstration. Soient $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ l'intersection de X avec $d+1$ hyperplans en position générale, U l'ouvert complémentaire de Y, et $\pi : \mathrm{U} \to \mathbf{P}_d$ la projection de centre Y. Soit F un faisceau algébrique cohérent sur X, pur, dont le support ne rencontre pas Y, et $\mathrm{S} \subset \mathrm{U}$ la sous-variété (pure) définie par l'annulateur de F. L'image directe $\mathrm{G} = \pi_*(\mathrm{F})$ est un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbf{P}_d$, et la démonstration du théorème 1.9 a montré que

$$\mu_{max}(\mathrm{G}) \leq \mu(\mathrm{F}) - \mu_{min}(\pi_*(\mathscr{O}_\mathrm{S}))$$

Le nombre $\mu_{min}(\pi_*(\mathscr{O}_\mathrm{S}))$ est minoré par un nombre qui ne dépend que de la multiplicité r de F et n et d. En considérant une filtration de Harder-Narasimhan de G, ceci nous ramène au cas des faisceaux cohérents sans torsion.

On raisonne par récurrence sur la dimension n de X. Pour $n = 1$, le résultat est évident. Soit Y une section hyperplane telle que $\mathrm{F}\,|_\mathrm{Y}$ ait une bonne filtration de Harder-Narasimhan ; cela signifie que la pente μ_i du gradué gr_i satisfait à une inégalité

$$\mu_i - \mu_{i+1} \leq \mathrm{A} \tag{1.1}$$

où A est une constante qui ne dépend que de r et de la variété polarisée X : ceci résulte de la démonstration du théorème de Grauert-Mülich, par

exemple selon la version d'Hirschowitz. La propriété de semi-stabilité de F montre que $h^0(\mathrm{F}(\ell)) = 0$ si $\ell \leq -\mu + \mu_{\mathrm{X}}$ où on a posé $\mu_{\mathrm{X}} = \mu(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$. On a alors l'inégalité

$$h^0(\mathrm{F}) \leq \sum_{\ell-\mu_{\mathrm{X}} \geq k \geq 0} h^0(\mathrm{F}(-k)|_{\mathrm{Y}}) \tag{1.2}$$

On peut alors, d'après l'hypothèse de récurrence, trouver une constante C′ ne dépendant que de r et des invariants numériques attachés à X telle que l'on ait, r_i désignant le rang de gr_i

$$\frac{h^0(gr_i)}{r_i} \leq \frac{([\mu_i + \mathrm{C}']_+)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Par suite, si l'on pose $\mathrm{C}'' = \mathrm{C}' + \mathrm{A}$ et si l'on tient compte de l'estimation (1.1) on obtient

$$\frac{h^0(\mathrm{F}\,|_{\mathrm{Y}})}{r} \leq \frac{([\mu + \mathrm{C}'']_+)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

De la majoration (1.2) ci-dessus, il découle

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{([\mu + \mathrm{C}'' - i]_+)^{n-1}}{(n-1)!},$$

Par suite, si $\mu + \mathrm{C}'' \leq 0$, $h^0(\mathrm{F}) = 0$. Si $\mu + \mathrm{C}'' > 0$, compte-tenu de la décroissance de la suite $i \mapsto ([\mu + \mathrm{C}'' - i]_+)^{n-1}$ on peut comparer la somme ci-dessus avec une intégrale, ce qui fournit la majoration

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \int_0^{\mu+\mathrm{C}''+1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, dx = \frac{(\mu + \mathrm{C}'' + 1)^n}{n!}.$$

C'est la majoration attendue, en choisissant $\mathrm{C} = \mathrm{C}'' + 1$. □

Démonstration de la proposition 2.1

On désigne par S(P) l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert P. Soient F un faisceau semi-stable de S(P), F′ un sous-faisceau cohérent. Considérons la filtration de Harder-Narasimhan de F′, et désignons par r'_i et μ'_i la multiplicité et la pente du

i-ème gradué ; on a $\mu'_i \leq \mu$, et en appliquant le lemme ci-dessus, on obtient qu'il existe une constante $\mathrm{B} > 0$ ne dépendant que de r telle que

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} \leq \frac{1}{r'd!}\sum_i r'_i([\mu'_i + m + \mathrm{B}]_+)^d)$$

$$\leq \frac{1}{d!}\Big((1-\frac{1}{r})([\mu + m + \mathrm{B}]_+)^d + \frac{1}{r}([\nu + m + \mathrm{B}]_+)^d\Big)$$

où $\nu = \mu_{min}(\mathrm{F}')$. La famille des faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert P étant limitée, il existe un entier m_0 et une constante $\mathrm{A} > 0$, ne dépendant que de X et de P, tels que pour $m \geq m_0$ on ait

$$h^0(\mathrm{F}(m)) = \mathrm{P}_\mathrm{F}(m) \geq \frac{(m-\mathrm{A})^d}{d!},$$

Soit ν_0 un entier tel que

$$\mathrm{B} + \mu(1-\frac{1}{r}) + \frac{\nu_0}{r} < -\mathrm{A}.$$

Quitte à changer éventuellement l'entier m_0 ci-dessus, on peut supposer que pour $m \geq m_0$, on a

$$\frac{1}{d!}\Big((1-\frac{1}{r})([\mu + m + \mathrm{B})_+]^d + \frac{1}{r}([\nu_0 + m + \mathrm{B}]_+)^d\Big) < \frac{\mathrm{P}_\mathrm{F}(m)}{r}$$

La fonction $x \mapsto [x]_+$ étant croissante, on obtient pour $m \geq m_0$ et $\nu \leq \nu_0$ l'inégalité

$$\frac{1}{d!}\Big((1-\frac{1}{r})([\mu + m + \mathrm{B}]_+)^d + \frac{1}{r}([\nu + m + \mathrm{B}]_+)^d\Big) < \frac{\mathrm{P}_\mathrm{F}(m)}{r}.$$

Par suite, pour $m \geq m_0$ et $\mu_{min}(\mathrm{F}') \leq \nu_0$

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} < \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r}.$$

Il reste à examiner les sous-faisceaux cohérents F′ pour lesquels on a $\nu = \mu_{min}(\mathrm{F}') > \nu_0$. On peut supposer que les quotients F/F′ sont purs. On obtient alors, quand F varie, une famille limitée $\mathscr{L}'$ de sous-faisceaux F′ d'après le lemme de Grothendieck. On peut alors supposer d'après le théorème B de Serre que pour $m \geq m_0$ on a $\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}(m)) = h^0(\mathrm{F}'(m))$.

L'inégalité voulue résulte alors de la définition de la semi-stabilité du faisceau F. On a donc vérifié que $S(P) \subset S_m(P)$ pour m assez grand.

Réciproque.

Soient p un entier, et $\mathscr{L}_p = \cup_{m \geq p} S^*_m(P)$; si F est un faisceau dont la classe d'isomorphisme appartient à $\mathscr{L}_p$, désignons par F'' un quotient semi-stable de F, par r'' sa multiplicité et par μ'' sa pente. On suppose que F'' déstabilise F. D'après l'hypothèse (ii)*, et le lemme (2.7), on a

$$\frac{P(m)}{r} \leq \frac{h^0(F''(m))}{r''} \leq \frac{1}{d!}([\mu'' + m + C]_+)^d$$

Or, il existe une constante A ne dépendant que de P, et un entier $m_0 > A$ tel que pour $m \geq m_0$ on ait

$$\frac{P(m)}{r} \geq \frac{(m - A)^d}{d!}$$

Pour $m \geq m_0$, ceci entraîne $m - A \leq \mu'' + m + C$; ainsi, $\mu'' \geq -A - C$. Alors la famille $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{m_0}$ est limitée, ainsi que la famille $\mathscr{L}''$ des quotients F'' considérés. On peut donc choisir un entier m_1 ne dépendant que de P tel que pour $m \geq m_1$ on ait $h^0(F''(m)) = P_{F''}(m)$ de sorte que si la classe de F appartient à $S^*_m(P)$ on a $p_F(m) \leq p_{F''}(m)$. Les polynômes de Hilbert qui apparaissent étant en nombre fini, ceci entraîne, quitte peut-être à changer m_1, $p_F \leq p_{F''}$ ce qui contredit la définition de F''. □

Démonstration de la proposition 2.3

Un faisceau F semi-stable de polynôme de Hilbert P, étant donné, on désigne par Max(F) l'ensemble des sous-faisceaux cohérent $F' \subset F$ tels que $p_{F'} = p_F$. De tels faisceaux sont semi-stables, et la famille $\cup_F \mathrm{Max}(F)$ est alors limitée. On peut alors appliquer le théorème B de Serre : pour m assez grand, on obtient $\mathrm{Max}(F) \subset \mathrm{Max}_m(F)$.

Dans l'autre sens, considérons $F' \in \mathrm{Max}_m(F)$ et supposons dans un premier temps que le quotient $F'' = F/F'$ soit pur. La première partie de la démonstration de la proposition 2.1 ci-dessus montre que si m a été choisi assez grand, $\mu_{min}(F')$ est minoré, sinon on obtiendrait une inégalité stricte. Alors la famille des F' est limitée quand F varie d'après le lemme de Grothendieck, ce qui permet l'usage du théorème B de Serre : on obtient l'existence d'un entier m_1 tel que si $m \geq m_1$ on ait pour tout F' de cette famille $h^0(F'(m)) = P_{F'}(m)$. Si F' appartient à $\mathrm{Max}_m(F)$ on a alors $p_{F'}(m) = p_F(m)$; puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes de Hilbert

réduits, ceci implique $p_{F'} = p_F$ pourvu que m ait été pris assez grand. Ainsi $F' \in \mathrm{Max}(F)$.

Supposons m assez grand pour que la conclusion de l'énoncé 2.1 soit vraie, et pour que $F'(m)$ soit engendré par ses sections chaque fois que $F' \in \mathrm{Max}(F)$. Considérons un sous-faisceau quelconque $G' \in \mathrm{Max}_m(F)$, de multiplicité r'. Soit F' l'image réciproque du plus grand sous-module cohérent de dimension $\leq d-1$ de F/G'. Alors $G' \subset F'$ et F' et G' ont même multiplicité r' ; on a alors les majorations

$$\frac{h^0(G'(m))}{r'} \leq \frac{h^0(F'(m))}{r'} \leq \frac{h^0(F(m))}{r}$$

la seconde inégalité résultant du choix de m. On a donc en fait des égalités, ce qui entraîne que $F' \in \mathrm{Max}_m(F)$ et $h^0(G'(m)) = h^0(F'(m))$. Comme le quotient F/F' est pur de dimension d ceci entraîne que F' appartient à $\mathrm{Max}(F)$. Par le choix de m, $F'(m)$ est engendré par ses sections, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(G'(m)) \otimes \mathscr{O}_X & \simeq & H^0(F'(m)) \otimes \mathscr{O}_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G'(m) & \hookrightarrow & F'(m) \end{array}$$

montre que $G' = F'$ et par suite G' appartient à $\mathrm{Max}(F)$. □

3. Le schéma de Hilbert

Une somme directe de faisceaux stables de même polynôme de Hilbert réduit est appelé polystable. Si un tel faisceau s'écrit $E = \oplus_i E_i^{k_i}$, avec E_i stable de multiplicité r_i, le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ des automorphismes est isomorphe au produit des groupes linéaires $\mathrm{GL}(k_i)$; on aura à considérer le sous-groupe $\mathrm{SL}(E)$ correspondant au sous-groupe des $(f_i) \in \prod_i \mathrm{GL}(k_i)$ tels que $\prod_i (\det f_i)^{r_i} = 1$. L'ensemble $\mathrm{Max}(E)$ des sous-faisceaux $E' \subset E$ de polynôme de Hilbert réduit p_E est alors un produit de grassmanniennes.

Soit P un polynôme. Fixons un faisceau polystable E et considérons le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(E, P)$ des modules cohérents quotients du faisceau E, et de polynôme de Hilbert P. C'est une variété projective qui pour ℓ assez grand se trouve plongée dans la grassmannienne $\mathbf{Grass}(H^0(E(\ell), P(\ell))$ des espaces vectoriels quotients de $H^0(E(\ell))$ de dimension $P(\ell)$: au faisceau quotient F on associe l'espace vectoriel quotient $H^0(F(\ell)$. Grothendieck construit en effet ce schéma comme sous-schéma fermé d'une telle grassmannienne [3].

Le groupe des automorphismes de E opère sur ce schéma de Hilbert et sur cette grassmannienne ; le plongement

$$\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{P}) \hookrightarrow \mathbf{Grass}(\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell),\mathrm{P}(\ell))$$

est équivariant. De plus, cette action s'étend en une action sur le fibré quotient canonique sur la grassmannienne, et par suite sur le déterminant du ce fibré : c'est le fibré inversible très ample qui fournit le plongement de Plücker. La variété $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ étant ainsi polarisée, on peut considérer l'ouvert $\mathbf{Hilb}^{s,s}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ des points semi-stables pour l'action du groupe $\mathrm{SL}(\mathrm{E})$. Il est remarquable que cet ouvert ne dépend pas de ℓ, pourvu que ℓ soit choisi assez grand :

Proposition 3.1. — *Soit r la multiplicité de* E. *Si ℓ est assez grand, les points semi-stables (resp. stables) pour l'action de* $\mathrm{SL}(\mathrm{E})$ *sur* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ *correspondent aux faisceaux quotients* $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *satisfaisant à la condition suivante : pour tout* $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{E})$, *de multiplicité* $0 < r' < r$, *on a,* F' *désignant l'image de* E' *dans* F

$$\frac{\mathrm{P_F}}{r} \leq \frac{\mathrm{P_{F'}}}{r'} \quad (resp. <)$$

On pourra donc parler des points semi-stables du schéma de Hilbert, sans préciser quelle polarisation on a choisie. Nous n'avons pas de référence pour cette proposition, mais un énoncé voisin pour la grassmannienne, énoncé qui s'adapte sans difficulté. Soient H et V deux espaces vectoriels, $\mathbf{Grass}(\mathrm{H}\otimes\mathrm{V},k)$ la grassmannienne des espaces vectoriels quotients $\mathrm{H}\otimes\mathrm{V} \to \mathrm{K}$ de dimension k, polarisée par le plongement de Plücker.

Lemme 3.2. — *(Mumford* [11] , [7] *proposition* 6.37*). Les points semi-stables (resp. stables) de* $\mathbf{Grass}(\mathrm{H}\otimes\mathrm{V},k)$ *pour l'action de* $\mathrm{SL}(\mathrm{H})$ *sont les espaces vectoriels quotients* $\mathrm{H}\otimes\mathrm{V} \to \mathrm{K}$ *qui satisfont à l'inégalité suivante, pour tout sous-espace* $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$ *non nul et distinct de* H,

$$\frac{\dim \mathrm{K}'}{\dim \mathrm{H}'} \geq \frac{\dim \mathrm{K}}{\dim \mathrm{H}} \quad (resp. >)$$

où K' *est l'image de* $\mathrm{H}'\otimes\mathrm{V}$ *dans* K.

Donnons la démonstration de la proposition 3.1 seulement dans le cas où $\mathrm{E} = \mathrm{H}\otimes\mathscr{O}_\mathrm{X}$, où H est un espace vectoriel fixé, seul cas utile dans la

suite. Dans ce cas, les points de Max(E) sont les sous-faisceaux $H' \otimes \mathscr{O}_X$ et l'inégalité de l'énoncé s'écrit

$$\frac{P_F}{\dim H} \leq \frac{P_{F'}}{\dim H'}$$

Démonstration. Désignons par A_ℓ l'espace vectoriel des sections de $\mathscr{O}_X(\ell)$. Pour ℓ assez grand, considérons la polarisation induite par le plongement de Grothendieck $F \mapsto H^0(F(\ell))$:

$$\mathbf{Hilb}(E, P) \to \mathbf{Grass}(H \otimes A_\ell, P(\ell))$$

dans la grassmannienne des quotients de $H \otimes A_\ell$ de dimension $P(\ell)$. La proposition est une conséquence des faits suivants :

a) étant donnée une famille finie $\mathscr{P}$ de polynômes P, à coefficients rationnels, on peut trouver un entier ℓ_0 tel que pour $\ell \geq \ell_0$ l'application $P \mapsto P(\ell) : \mathscr{P} \to \mathbf{Q}$ soit strictement croissante.

b) les familles de faisceaux F et F′ introduits dans l'énoncé sont limitées.

Dès lors, l'inégalité

$$\frac{P_{F'}}{\dim H'} \geq \frac{P_F}{\dim H}$$

est équivalente à

$$\frac{h^0(F'(\ell))}{\dim H'} \geq \frac{h^0(F(\ell))}{\dim H}$$

pour un choix convenable de ℓ, ce choix ne dépendant ni de F, ni de F′. Mais la dernière inégalité traduit simplement la semi-stabilité de l'espace vectoriel quotient $H \otimes A_\ell \to H^0(F(\ell))$, pour l'action de SL(H), compte-tenu du fait que $H^0(F'(\ell))$ s'identifie à l'image de $H' \otimes A_\ell$ dans $H^0(F(\ell))$ pourvu que $\ell \geq \ell_0$, avec ℓ_0 assez grand. Il suffit en effet d'appliquer le critère de Mumford.

4. La construction de Simpson

Soit P un polynôme de degré d. On se fixe un entier m assez grand pour que tout faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P satisfasse aux conditions suivantes :

a) le faisceau $F(m)$ est engendré par ses sections, et $H^q(F(m)) = 0$, pour $q > 0$ et la même chose est vraie pour tout sous-faisceau $F' \in \mathrm{Max}(F)$.

b) les conclusions des énoncés 2.1 et 2.3 sont vraies.

On se fixe un espace vectoriel H de dimension $\mathrm{P}(m)$ et on prend pour E le faisceau localement libre $\mathrm{E} = \mathrm{H} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$, dont le groupe des automorphismes s'identifie à GL(H). Tout faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert P définit un point du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ tel que le morphisme induit $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ soit un isomorphisme. La proposition 3.1 va permettre de montrer sans grand effort qu'un tel point est semi-stable sous l'action du groupe SL(H). La réciproque est plus délicate, car il n'est pas évident qu'un point de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ semi-stable pour l'action de SL(H) définisse un faisceau quotient semi-stable, ni même pur. L'idée remarquable de Simpson est de se placer dans l'adhérence schématique $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ de l'ouvert $\mathbf{Hilb}_{pur}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ des modules quotients qui sont purs.

Théorème 4.1. — *Soient* H *un espace vectoriel de dimension* $\mathrm{P}(m)$, *et* $\mathrm{E} = \mathrm{H} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$. *Soit* q *un point fermé de* $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$, *définissant un faisceau quotient* F *de* E. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le faisceau* F *est semi-stable, et le morphisme* $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ *induit par la projection canonique est un isomorphisme ;*

(2) *le point* q *est semi-stable sous l'action de* SL(H).

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : On utilise la proposition 3.1. Supposons que le faisceau F, dont on désigne la multiplicité par r satisfasse aux conditions (1). Soient $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{F})$, défini par un sous-espace vectoriel non nul $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$, et F' le sous-faisceau de F engendré par E' ; on désigne par r' sa multiplicité. D'après le critère 2.1 on a

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r}.$$

De plus, en cas d'égalité, ceci signifie que F' appartient à $\mathrm{Max}_m(\mathrm{F})$, donc à $\mathrm{Max}(\mathrm{F})$ d'après le choix de m et la proposition 2.3. Alors

$$\frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}}{h^0(\mathrm{F}'(m))} \geq \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}}}{h^0(\mathrm{F}(m))}.$$

En effet, il suffit d'examiner les termes dominants de ces polynômes : en cas d'inégalité stricte, on obtient bien sûr le résultat ; en cas d'égalité, on a $\mathrm{F}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{F})$ et ceci fournit même l'égalité entre ces polynômes. Remarquons maintenant que $\dim \mathrm{H} = h^0(\mathrm{F}(m))$ d'après l'hypothèse (1). De plus, la condition (1) entraîne que l'application linéaire induite $\mathrm{H}' = \mathrm{H}^0(\mathrm{E}'(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$ est injective ; il en résulte l'inégalité

$$\frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}}{\dim \mathrm{H}'} \geq \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}}}{\dim \mathrm{H}}.$$

D'après la proposition 3.1, on obtient la semi-stabilité du point du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ relative à l'action de $\mathrm{SL}(\mathrm{H})$ correspondant au faisceau quotient F .

(2)⇒(1) D'après le critère 3.1, il est évident que si la condition (2) est satisfaite, l'application induite par la projection canonique $\mathrm{H} = \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ est injective, car sinon le noyau aurait son image nulle dans F, ce qui est en contradiction avec le critère 3.1. Puisque le point défini par F appartient à $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ on peut trouver d'après le théorème 5.1 un morphisme $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ dans un faisceau pur G de même polynôme de Hilbert P dont le noyau et le conoyau soient de dimension $< d$. On va montrer que le faisceau G est semi-stable : pour ceci il suffit de vérifier qu'il définit un faisceau de $\mathrm{S}^*_m(\mathrm{P})$. Soit $\mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ un quotient pur de G de dimension d et multiplicité r'' ; considérons l'image F'' l'image de F dans G''. Evidemment, les faisceaux F'' et G'' ont même multiplicité r''. Soit H'' l'image de H dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}''(m))$. Le critère 3.1 transcrit en termes de quotients fournit une inégalité

$$\frac{\mathrm{P_F}}{\dim \mathrm{H}} \geq \frac{\mathrm{P_{F''}}}{\dim \mathrm{H}''}$$

ce qui conduit pour les multiplicités aux inégalités

$$\frac{\dim \mathrm{H}}{r} \leq \frac{\dim \mathrm{H}''}{r''} \leq \frac{h^0(\mathrm{G}''(m))}{r''} \tag{3.1}$$

Mais l'inégalité

$$\frac{\mathrm{P}(m)}{r} \leq \frac{h^0(\mathrm{G}''(m))}{r''}$$

signifie que la classe d'isomorphisme de G appartient à $\mathrm{S}^*_m(\mathrm{P})$. D'après le choix de m, le faisceau G est semi-stable. Le choix de m entraîne encore que $h^0(\mathrm{G}(m)) = \mathrm{P}(m)$ et que $\mathrm{G}(m)$ est engendré par ses sections. Quand on applique les inégalités (3.1) ci-dessus à $\mathrm{G}'' = \mathrm{G}$ on obtient $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{H}'' = h^0(\mathrm{G}(m))$ et les applications linéaires $\mathrm{H} \to \mathrm{H}''$ et $\mathrm{H}'' \to \mathrm{H}^0(\mathrm{G}(m))$, respectivement surjectives et injectives, sont en fait des isomorphismes. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}} & \to & \mathrm{F}(m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}'' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}} & \to & \mathrm{G}(m) \end{array}$$

il découle que le morphisme $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est surjectif. Puisque $\mathrm{P_F} = \mathrm{P_G}$, f est un isomorphisme ; F est donc semi-stable et le morphisme canonique $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ est un isomorphisme. □

Les points semi-stables de $\overline{\mathbf{Hilb}}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})$ définissent un sous-schéma localement fermé noté $\overline{\mathbf{Hilb}}^{s,s}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})$. Bien sûr, l'espace de modules est le quotient de Mumford

$$\mathrm{M_X}(\mathrm{P}) = \overline{\mathbf{Hilb}}^{s,s}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})/\mathrm{SL}(\mathrm{H})$$

et par construction, c'est une variété projective. Il reste à montrer la propriété de module grossier et à identifier les points fermés de ce quotient, ce qui est standard : il n'y a pas plus de difficultés que dans le cas où la dimension d est 1 [7] . Pour vérifier que les classes d'équivalence de faisceaux stables, qui coïncident bien sûr avec les classes d'isomorphisme, forment un ouvert, il suffit de vérifier qu'elles proviennent de l'ouvert des points $\mathrm{SL}(\mathrm{H})-$stables de $\overline{\mathbf{Hilb}}^{s,s}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})$. C'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.2. — *Soit q un point de $\overline{\mathbf{Hilb}}^{s,s}_{pur}(\mathrm{E},\mathrm{P})$, correspondant à un faisceau semi-stable F quotient de E ; un sous-faisceau $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ appartient à $\mathrm{Max}(\mathrm{F})$ si et seulement si il est l'image d'un sous-faisceau $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{E})$ satisfaisant à l'identité*

$$\frac{\mathrm{P_F}}{\mathrm{rg}\,(\mathrm{E})} = \frac{\mathrm{P_{F'}}}{\mathrm{rg}\,(\mathrm{E}')} \tag{3.2}$$

De plus ce sous-faisceau E' unique.

Démonstration. Soit $\mathrm{F}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{F})$, de multiplicité r'. Soit $\mathrm{H}' = \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$. On considère le sous-faisceau $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{E})$ défini par $\mathrm{E}' = \mathrm{H}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$. En vertu du choix a) de m, ce sous-faisceau engendre F' ; l'énoncé 2.1 et le choix b) de m entraînent que l'on a l'égalité

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} = \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r}.$$

L'égalité $p_{\mathrm{F}'} = p_{\mathrm{F}}$ peut alors s'écrire

$$\frac{\mathrm{P_F}}{\dim \mathrm{H}} = \frac{\mathrm{P_{F'}}}{\dim \mathrm{H}'},$$

c'est-à-dire que l'on a la condition (3.2).

Réciproque. Montrons qu'un sous-faisceau $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ image d'un sous-module $\mathrm{E}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{E})$, satisfaisant à la condition (3.2) appartient à $\mathrm{Max}(\mathrm{F})$. Le sous-faisceau E' correspond à un sous-espace vectoriel $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$. La condition (3.2) s'écrit

$$\frac{\mathrm{P_F}}{\dim \mathrm{H}} = \frac{\mathrm{P_{F'}}}{\dim \mathrm{H}'}$$

En regardant les termes dominants, ceci donne pour les multiplicités l'égalité

$$\frac{\dim \mathrm{H}}{r} = \frac{\dim \mathrm{H}'}{r'}.$$

On a évidemment $\dim \mathrm{H}' \leq h^0(\mathrm{F}'(m))$, et par conséquent

$$\frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'}.$$

En vertu du choix de m et du critère 2.1 on a en fait l'égalité. Par suite $\mathrm{F}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{F})$ d'après la proposition 2.3. Remarquons que l'on a en outre $\mathrm{H}' = \mathrm{H}^0(\mathrm{F}'(m))$ ce qui détermine de façon unique le faisceau E'. □

5. Déformations et pureté.

Dans tout cette section, la variété X sera supposée lisse de dimension n ; on désigne par ω_{X} le faisceau canonique. Cet appendice est consacré à la démonstration du résultat suivant qui a été utilisé dans la construction ci-dessus :

Théorème 5.1. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent sur une variété algébrique projective* X, *de codimension* c, *pouvant se déformer en un faisceau pur de codimension* c. *Alors il existe un faisceau algébrique cohérent* G *pur de codimension* c *et un morphisme* $\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *satisfaisant aux propriétés suivantes :*

1. *Le noyau de* φ *est le plus grand sous-module cohérent de* F *de codimension* $> c$.
2. *Le faisceau* G *a même polynôme de Hilbert que* F.

Cet énoncé est dû à Simpson([13]). On peut aussi trouver un énoncé voisin pour les faisceaux de dimension n chez Gieseker ([2] , lemme 4.2). La démonstration que nous proposons ici évite l'argument de cohérence de certaines images directes invoqué par Simpson. Elle nous semble plus simple, modulo quelques sorites obligés sur les relations entre dualité et pureté.

Lemme 5.2. — *Soit* X *une variété lisse de dimension* n *et* F *un faisceau algébrique cohérent de codimension* c. *Alors* $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}}) = 0$ *pour* $q < c$, *et le faisceau* $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}})$ *est de codimension* c. *Pour* $q > c$, *les faisceaux* $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}})$ *sont de codimension* $\geq q$.

Démonstration. La deuxième assertion s'obtient évidemment en localisant aux points de hauteur $< q$. De même, en localisant aux point de hauteur $\leq c$ on obtient que $\underline{\mathrm{Ext}}^c(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}})$ est de codimension exactement c. Pour la première assertion, on choisit une résolution gauche finie par des faisceaux localement libres $\mathrm{L.} \to \mathrm{F}$, à laquelle on applique le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \omega_{\mathrm{X}})$. On obtient un complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{L.}, \omega_{\mathrm{X}})$ dont les faisceaux de cohomologie sont portés par le support de F. Un lemme bien connu attribué à Peskine et Szpiro [12] ou Kempf et Laksov [5] montre qu'alors ces faisceaux sont nuls jusqu'en degré $c-1$. □

Rappelons que F est pur de codimension c si et seulement si tous les points associés à F sont de hauteur c ; en termes de profondeur ceci signifie que pour tout point x appartenant au support de F et tel que $\mathrm{ht}\, x > c$ on a $\mathrm{prof}(\mathrm{F}_x) \geq 1$, c'est-à-dire, en termes de dimension homologique, $\mathrm{dh}(\mathrm{F}_x) < \mathrm{ht}\, x$. On a alors la version suivante du critère de Serre :

Lemme 5.3. — *Un faisceau cohérent de codimension c sur X est pur si et seulement si pour tout $q > c$ le support du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}})$ est de codimension $\geq q+1$.*

Définition 5.4. — *Soit F un faisceau algébrique cohérent de codimension c sur la variété X. On appelle dual de F le faisceau $\mathrm{F}^{\smile} = \underline{\mathrm{Hom}}^c(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}})$.*

Si on considère le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{L.}, \omega_{\mathrm{X}})$ introduit dans la démonstration du lemme 5.2, en appliquant à nouveau le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \omega_{\mathrm{X}})$ on obtient une suite spectrale donnée par

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{\mathrm{Ext}}^{-q}(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}}), \omega_{\mathrm{X}})$$

et qui a pour aboutissement F en degré 0 et 0 en degré non nul. Cette suite spectrale est en fait indépendante du choix de la résolution, et fournit un morphisme canonique $\mathrm{F} \to \mathrm{F}^{\smile\smile}$.

Définition 5.5. — *Un faisceau algébrique cohérent de codimension c sur X est dit réflexif si le morphisme canonique $\mathrm{F} \to \mathrm{F}^{\smile\smile}$ est un isomorphisme.*

Pour $c = 0$ on retrouve donc la notion habituelle de faisceau réflexif.

Proposition 5.6. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de codimension* c *sur la variété lisse* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Le faisceau* F *est réflexif.*
2. *Le faisceau* F *est le dual d'un faisceau algébrique cohérent de codimension* c.
3. *Pour* $q > c$, *le faisceau* $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}})$ *est de codimension* $\geq q+2$.

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est bien sûr évidente. Montrons $2 \Rightarrow 3$: on montre que si F est de codimension c, le dual $\mathrm{F}^\vee$ satisfait à la condition 3. D'après la suite spectrale ci-dessus, pour $p > c$, le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^p(\mathrm{F}^\vee, \omega_{\mathrm{X}})$ s'identifie à $\mathrm{E}_2^{p,-c}$ et pour $k \geq 2$ le faisceau $\mathrm{E}_{k+1}^{p,-c}$ est le noyau de la différentielle

$$d_k^{p,-c} : \mathrm{E}_k^{p,-c} \to \mathrm{E}_k^{p+k,-c-k+1}$$

L'image de cette différentielle se plonge dans un quotient de

$$\mathrm{E}_2^{p+k,-c-k+1} = \underline{\mathrm{Ext}}^{p+k}(\underline{\mathrm{Ext}}^{c+k-1}(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}}), \omega_{\mathrm{X}}))$$

et compte-tenu du lemme 5.2 appliqué au faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^{c+k-1}(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}})$ cette image est de codimension $\geq p+2$. D'autre part, pour k assez grand, $\mathrm{E}_k^{p,-c}$ est nul ; on voit donc par récurrence descendante sur k que tous les termes $\mathrm{E}_k^{p,-c}$ sont de codimension $\geq p+2$, et donc en particulier $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}^\vee, \omega_{\mathrm{X}})$ est de codimension $\geq p+2$.

$3 \Rightarrow 1$: On utilise une nouvelle fois la suite spectrale ci-dessus ; il suffit de vérifier que l'on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p(\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}}), \omega_{\mathrm{X}}) = 0$$

si $q > c$ et $p = q$ ou $p = q+1$. Il suffit d'appliquer le lemme 5.2 au faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^q(\mathrm{F}, \omega_{\mathrm{X}})$ qui est par hypothèse de codimension $\geq q+2$. □

Corollaire 5.7. — *Le dual* $\mathrm{F}^\vee$ *d'un faisceau algébrique cohérent de codimension* c *sur la variété* X *est un faisceau pur de codimension* c.

Corollaire 5.8. — *Un faisceau algébrique cohérent de codimension* c *sur la variété* X *est pur si et seulement si le morphisme canonique* $\mathrm{F} \to \mathrm{F}^{\vee\vee}$ *est injectif.*

On peut évidemment transcrire la notion de réflexivité en termes de dimension homologique, ou ce qui revient au même, de profondeur :

Lemme 5.9. — *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent de codimension* c *sur* X. *Alors* F *est réflexif si et seulement si pour tout point* x *appartenant au support de* F *et de hauteur* $q > c$, *le module* F_x *est de Cohen-Macaulay si* $q = c+1$, *et de profondeur* ≥ 2 *si* $q > c+1$.

Lemme 5.10. — *Soit* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ *une hypersurface, et* F *un faisceau algébrique cohérent de dimension* d *sur* X, *dont les points associés n'appartiennent pas à* Y. *Alors* $\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}}$ *est de dimenion* $d-1$, *et on a les assertions suivantes :*

1. *Si le faisceau* $\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}}$ *est pur, il en est de même du faisceau* F *au voisinage de* Y.
2. *Si le faisceau* F *est réflexif au voisinage de* Y, *sa restriction* $\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}}$ *est pure.*

Démonstration. La question est locale au voisinage de Y. On peut donc supposer que Y est donné par une équation $f = 0$ et que toutes les sous-variétés fermées définies par les points associés de F rencontrent Y. L'hypothèse signifie que f n'est pas diviseur de 0 dans F, c'est-à-dire que l'on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{F} \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}/f\mathrm{F} \to 0.$$

Le quotient $\mathrm{F}/f\mathrm{F}$ s'identifie bien sûr à $\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}}$ et d'après le lemme de Krull il est de dimension $d-1$.

Démontrons l'assertion 1 : soit $\mathrm{F}' \hookrightarrow \mathrm{F}$ un sous-module cohérent non nul de F, pur. On a alors une suite exacte de faisceaux cohérents sur X

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}', \mathrm{F}) \xrightarrow{f} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}', \mathrm{F}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}', \mathrm{F}/f\mathrm{F}).$$

D'après le lemme de Nakayama, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}', \mathrm{F}/f\mathrm{F})$ est non nul en un point x où le support de F' rencontre l'hypersurface Y. Ainsi,

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}'/f\mathrm{F}', \mathrm{F}/f\mathrm{F}) \neq 0.$$

Le choix d'une section locale non nulle de ce faisceau montre que puisque $\mathrm{F}/f\mathrm{F}$ est pur par hypothèse, $\dim \mathrm{F}'/f\mathrm{F}' \geq d-1$. Puisque f n'est pas diviseur de zéro dans F', le lemme de Krull entraîne que $\dim \mathrm{F}' \geq d$. Ceci démontre que F est pur et prouve l'assertion 1.

Voyons maintenant l'assertion 2 : soit $c = n-d$; si x est un point de Y appartenant au support de F et de hauteur $\geq c+1$ dans Y, il est de hauteur $\geq c+2$ dans X et la formule

$$\mathrm{prof}\,(\mathrm{F}_x) = \mathrm{prof}\,(\mathrm{F}_x/f\mathrm{F}_x) + 1$$

montre que si F est réflexif au voisinage de Y, on a $\operatorname{prof}(F_x/fF_x) \geq 1$. Ainsi, la restriction $F|_Y$ est pure au voisinage de Y, ce qui démontre l'assertion 2. □

Démonstration du théorème 5.1

On désigne par T le plus grand sous-module cohérent de codimension $\geq c+1$ contenu dans F. L'hypothèse signifie qu'il existe un germe de courbe lisse (C, s) et un faisceau algébrique cohérent $\mathscr{F}$ sur $C \times X$, plat sur C tel que $\mathscr{F}(s)$ soit isomorphe à F et tel que pour tout point fermé $t \in C$ distinct de s le faisceau $\mathscr{F}(t)$ soit pur. L'hypothèse de platitude sur C implique que si z est une coordonnée locale sur C s'annulant au point t, le morphisme $\mathscr{F} \xrightarrow{z} \mathscr{F}$ est injectif, ce qui signifie qu'aucun des points associé à $\mathscr{F}$ n'appartient à une fibre de la projection $C \times X \to C$. D'après le lemme 5.10 ci-dessus, le faisceau $\mathscr{F}$ est pur en dehors du support de T. Ainsi le morphisme canonique $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^{\vee\vee}$ est injectif sur cet ouvert.

Posons $\mathscr{K} = \operatorname{coker}\ \varphi$, et considérons le sous-faisceau $\mathscr{R}$ de $\mathscr{K}$ défini par le noyau de

$$\mathscr{K} \xrightarrow{z^m} \mathscr{K}$$

pour m assez grand, où z est une coordonnée sur C au point s : c'est aussi le plus grand sous-module cohérent de $\mathscr{K}$ dont le support est contenu dans la fibre spéciale au-dessus du point s. La multiplication par z dans le quotient $\mathscr{K}/\mathscr{R}$ est alors injective. Par suite, ce quotient est plat sur C.

Considérons l'image réciproque $\mathscr{G}$ de $\mathscr{R}$ par la projection $\mathscr{F}^{\vee\vee} \to \mathscr{K}$. Le morphisme canonique $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^{\vee\vee}$ se factorise à travers $\mathscr{G}$. Au-dessus de l'ouvert $C' = C - \{s\}$, le morphisme canonique $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un isomorphisme, car le conoyau est $\mathscr{R}$. Les points associés de $\mathscr{G}$ font partie de ceux de $\mathscr{F}^{\vee\vee}$, et donc de ceux de $\mathscr{F}$. Puisque $\mathscr{F}$ est C−plat, aucun d'entr'eux n'appartient à une fibre. Ceci implique que $\mathscr{G}$ est C−plat. Par suite le polynôme de Hilbert de $\mathscr{G}(t)$ reste constant et égal à celui de F.

On prend $G = \mathscr{G}(s)$, et on note encore $\varphi : F \to G$ le morphisme induit. De la suite exacte $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{F}^{\vee\vee} \to \mathscr{K}/\mathscr{R} \to 0$ et de la platitude de $\mathscr{K}/\mathscr{R}$ on déduit que G est un sous-module de $\mathscr{F}^{\vee\vee}(s)$. Ce faisceau est pur d'après le lemme 5.10 ci-dessus et donc G est lui-même pur. Le noyau du morphisme induit $\varphi : F \to G$ contient T ; ce noyau est de codimension $\geq c+1$ donc aussi contenu dans T. C'est donc exactement T; ceci achève la démonstration. □

Bibliographie

[1] W. FULTON. *Intersection Theory,* Springer-Verlag, (1984) .

[2] D. GIESEKER. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface,* Ann. of Maths **106** (1977) 45-60 .

[3] A. GROTHENDIECK. *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algebrique, IV : les schémas de Hilbert,* Sém. Bourbaki **221** (1960).

[4] R. HARTSHORNE. *Algebraic Geometry,* GTM, Springer Verlag, New-York (1977) .

[5] G. KEMPF ET D. LAKSOV. *The determinantal formula of Schubert calculus,* Acta. Math. **132** (1974) 153-162 .

[6] J. LE POTIER. *Fibrés de Higgs et systèmes locaux,* Sém. Bourbaki (1991).

[7] J. LE POTIER. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques,* Cours de D.E.A., Université Paris 7 (1991) .

[8] M. MARUYAMA. *Moduli of stable sheaves, II,* J. Math. Kyoto University **18** (1978) 557-614 .

[9] M. MARUYAMA. *The theorem of Grauert-Mülich-Spindler,* Math. Annalen **255** (1981) 317-533 .

[10] M. MARUYAMA. *On boundness of families of torsion free sheaves.,* J. Math. Kyoto University **21-4** (1981) 673-701 .

[11] D. MUMFORD ET J. FOGARTY. *Geometric Invariant Theory,* Springer Verlag (1982).

[12] C. PESKINE. *Introduction algébrique à la géométrie projective,* Cours de D.E.A., Université Pierre et Marie Curie (1990).

[13] C. T. SIMPSON. *Moduli of Representations of the Fundamental Group of a Smooth Variety,* Preprint, Princeton University (1990)

J. Le Potier
UFR de Mathématiques et URA 212
Université Paris 7
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05